

Wiskundige formules in natuurwetenschappen en wiskunde

Stand van zaken, internationale literatuur en lessuggesties

Wiskunde wordt vaak aangeduid als taal van de natuurwetenschappen. Maar de afstemming tussen de schoolvakken wiskunde, biologie, natuurkunde en scheikunde is niet bevredigend. Dit betreft onder andere het rekenen en de omgang met formules. De problematiek van rekenen heeft in het recente verleden veel aandacht gekregen en in dit artikel focussen we ons op de omgang met formules in de genoemde vakken.

Bij de recente herziening van de binass-syllabi is aandacht besteed aan dit onderwerp, mede op aandrang van docenten uit het hoger onderwijs. Zij constateerden dat eerstejaars studenten formules

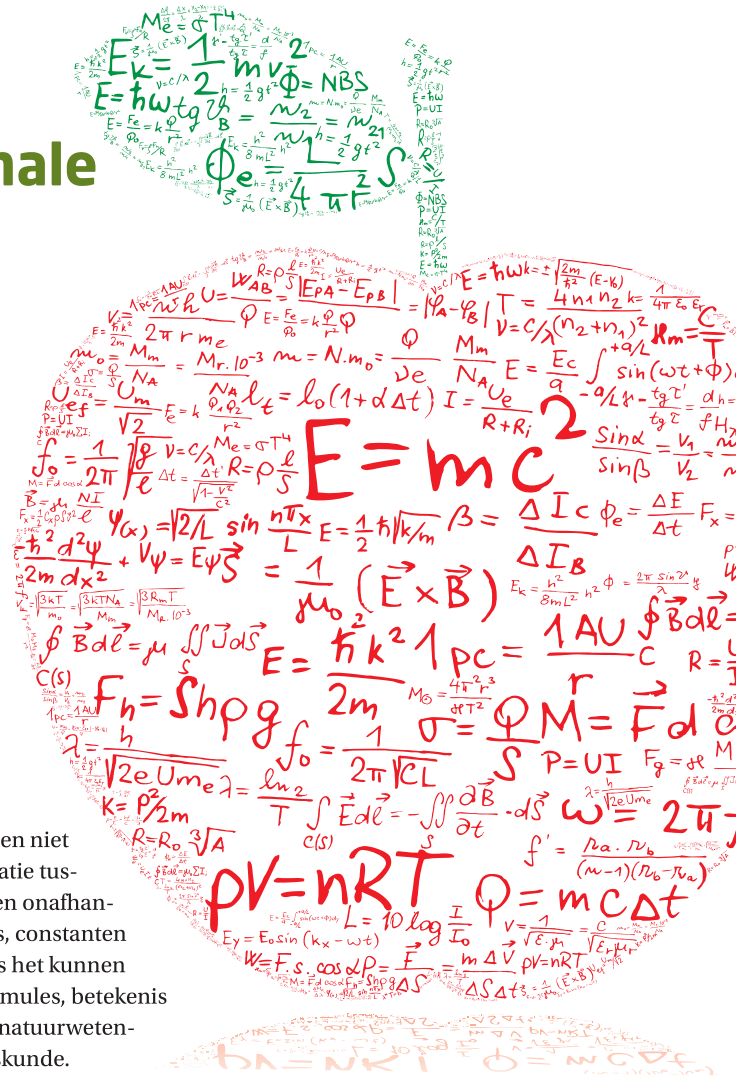
vaak alleen als rekentuig zien en niet als een uitdrukking van de relatie tussen grootheden afhankelijke en onafhankelijke variabelen, parameters, constanten en eenheden. Wat ontbreekt is het kunnen lezen en interpreteren van formules, betekenis geven aan formules, zowel in natuurwetenschappelijke vakken als in wiskunde. In dit artikel besteden we eerst aandacht aan de stand van zaken met formules in syllabi en eindexamens in Nederland. Met internationale literatuur tonen we aan dat de kloof tussen het onderwijs in wiskunde en natuurwetenschappen niet een typisch Nederlands probleem is. Op basis hiervan doen we een aantal suggesties ter verbetering van de samenhang tussen de bètavakken op het gebied van formules.



HARRIE EIJKELHOF (Universiteit Utrecht) is emeritus hoogleraar didactiek van de natuurkunde en gastmedewerker van het Freudenthal Instituut. Contact: h.m.c.eijkelhof@uu.nl



PETER KOP, vakdidacticus wiskunde bij Iclon, Leiden; lid van vakvernieuwingscommissie wiskunde; promoveerde in 2020 met proefschrift 'Graphing formulas by hand to promote symbol sense: Becoming friends with algebraic formulas'. Contact: koppmgm@iclon.leidenuniv.nl



Stand van zaken

De natuurkundesyllabi bevatten tientallen formules in vrijwel alle subdomeinen. In de huidige syllabi ligt hierin de nadruk op het kunnen rekenen. In de onlangs herziene natuurkundesyllabi wordt meer aandacht besteed aan het redeneren met formules. De biologiesyllabi noemen alleen de wet van Fick, maar die wordt niet in formulevorm be-



schreven. De term formule wordt meestal gebruikt bij molecuul- en structuurformules. In de herziene syllabi wordt, zonder voorbeelden, genoemd: het toelichten wat de invloed is van de verschillende variabelen in een gegeven formule op het daarmee beschreven biologische proces.

Ook de scheikundesyllabi gebruiken de term formule voornamelijk in de betekenis van structuur van moleculen. Daarnaast worden in de herziene syllabi zes formules genoemd als 'relaties', zoals dichtheid en molair volume.

In de wiskundesyllabi wordt veel aandacht gegeven aan algebraïsche vaardigheden. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen wiskundige technieken en rekenregels (specifieke vaardigheden) en redeneren met formules over karakteristieken als stijgen/dalen en asymptotisch gedrag (algemene algebraïsche vaardigheden). Daarnaast zijn er subdomeinen over formules en functies, standaardfuncties, functies en grafieken.

Formules in de eindexamens

Analyse van de eindexamens van de bètavakken laat grote verschillen zien.

In de natuurkunde-examens spelen formules een belangrijke rol, nadruk ligt veelal op de rekenkant van formules, minder op de aard en de interpretatie van formules.

De biologie-examens bevatten zelden formules. Sinds 2019 wordt drie keer aandacht besteed aan de wet van Fick, maar er wordt weinig tot geen redeneren met de formule gevraagd.

In de scheikunde-examens wordt vrij veel gerekend, maar in de correctievoorschriften wordt gesteld dat leerlingen geen formules hoeven te gebruiken.

In de wiskunde-examens spelen formules een grote rol, zowel in context als zonder context. Geregeld worden vooral biologische of natuurkundige contexten gebruikt. De gegeven formules hierbij zijn vaak gebaseerd op onderzoek en worden gebruikt om berekeningen te maken bij een probleemsituatie en/of om te manipuleren. De variabelen in een formule worden benoemd met de eenheden; de getallen en parameters worden vaak gepresenteerd als constanten, zonder eenheden.

Internationale literatuur

Ook in andere landen hebben veel leerlingen en studenten moeite om een verbinding te maken tussen de wiskunde in de wiskundelessen en wiskunde in de natuurwetenschappelijke lessen. In literatuur wordt vooral aandacht besteed aan de volgende punten.

1. Aard van formules. In het wiskunde-onderwijs worden formules vaak louter gezien als rekenmiddel, waarbij parameters en constanten worden uitgedrukt in getallen, zonder eenheden. Ook bij bi-nask-vakken zien leerlingen een formule vaak enkel als rekenvoorschrift en niet als een uitdrukking van fundamentele relatie tussen grootheden, bijvoorbeeld een definitie, wet of experimenteel verband.
2. In de wiskunde worden de variabelen in formules vaak aangeduid met x of t en y , functies met f en constante met a . Bij formules met grootheden lijkt de keuze van de letters vaak willekeurig. Bij natuurwetenschappen worden veel verschillende letters gebruikt die in het Engels aansluiten bij de conceptuele betekenis, bijvoorbeeld F als kracht, T als temperatuur (of trillingstijd), en v als snelheid. De grootheden hebben ook specifieke eenheden.
3. Er is weinig contact tussen de docenten wiskunde en natuurwetenschappen met als gevolg dat er weinig aandacht is voor de wijze waarop wiskunde in de wiskundelessen gegeven wordt en hoe in de natuurwetenschappelijke vakken.
4. In recente internationale artikelen wordt aandacht besteed aan blending (bij elkaar brengen) van wiskundig en natuurwetenschappelijk denken, die nodig is om wiskundige formules in natuurwetenschappelijke context te interpreteren. In wiskundelessen zou dan aandacht besteed kunnen worden aan het redeneren over het globaal verloop van de grafiek (covariational reasoning). In natuurwetenschappelijke lessen is dan naast deze wiskundige kijk op formules ook een scientific sense making nodig: wat zegt de formule over de natuurwetenschappelijke context. Op deze wijze worden wiskundig en natuurwetenschappelijk denken gekoppeld.

Conclusies

Het redeneren met formules in de lessen van bètavakken verdient meer aandacht. Mede door het feit dat veel disciplines in het hoger onderwijs meer wiskundig van aard worden. Inzicht in wederzijdse cultuurverschillen tussen wiskunde en natuurwetenschappen is belangrijk voor docenten omdat zonder deze bewustwording het lastig is om samen te werken.

Redeneren met wiskundige formules bij wiskunde en natuurwetenschappen

Bovenstaande punten zijn van belang voor curricula vernieuwingen. Maar op korte termijn kan al aandacht besteed worden aan relevante aspecten:

- Onderscheid van afhankelijke variabelen, onafhankelijke variabelen, parameters en constanten.
- Inzicht in de aard van formules, bijvoorbeeld definities, wetten/principes, experimentele verbanden.
- Dimensies en bijbehorende eenheden in wiskundige formules, in het bijzonder bij parameters en constanten.
- Expliciet maken van randvoorwaarden van experimentele formules en model-aannamen die gemaakt zijn.
- Bewust worden van verschillen tussen het gebruik van formules in de verschillende bètavakken, maar ook overeenkomsten zien.

Suggesties voor combinatieopdrachten

We eindigen met enkele voorbeeldopgaven waarin de interpretatie van formules gedaan wordt vanuit zowel wiskundig perspectief (in wiskundelessen) als vanuit natuurwetenschappelijk perspectief (in natuurweten-

In het havo examen wiskunde B (2019-1) wordt de geluidssnelheid in zeewater benaderd met de formule van Wilson:

$$v = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(Z - 35) + D/60, \text{ met}$$

v de geluidssnelheid in m/s;

T de watertemperatuur in °C;

Z het zoutgehalte van het zeewater in promille;

D de waterdiepte in m.

Gevraagd worden drie berekeningen, waarbij geen rekening gehouden wordt met de randvoorwaarden van de formule: $33\% < Z < 37\%$ en $-3^\circ\text{C} < T < 30^\circ\text{C}$. Er is helaas geen vraag om goed te kijken naar de inhoud van de formule.

Redeneren met deze formule kan bevorderd worden door vragen als:

- (1) Wat zijn de (on)afhankelijke variabelen? (wi&na-les)
- (2) Wat is de eenheid van 1,391 en van 60? (wi&na-les)
- (3) Welk concept zit verborgen in het getal 1449,2? (na-les)
- (4) Wat is de invloed van de verschillende onafhankelijke variabelen op de geluidssnelheid v ? Schets daarvoor de globale grafieken van v - T , van v - Z , en van v - D . (wi les)
- (5) De formule van Wilson kan ook geschreven worden in de vorm $v = -0,0546(T - \dots)^2 + \dots + 1,391(Z - 35) + 1/60D$. Doe dat en vertel wat in deze vorm beter af te lezen is. (wi-les)
- (6) Waarom kunnen mensen zich onder water minder oriënteren dan boven water op de richting waar het geluid vandaan komt? (na-les)

Voorbeeld 1: focus op redeneren met formules.

Atmosfeer (havo wiA, 2017-2)

De stratosfeer bestaat uit twee delen. In beide delen neemt de temperatuur toe naarmate je hoger komt. Voor het bovenste deel (tussen de 32 en 48 km) geldt de formule $T = 2,8h - 134,1$ met de temperatuur T in °C en de hoogte h in km.

- (1) Wat zijn de grootheden en eenheden die passen bij de getallen 2,8 en 134,1? (wi&na-les)
Je kunt deze formule herleiden tot $h = a \cdot T + b$.
- (2) Laat deze herleiding zien en geef aan wat de waarden en eenheden zijn van a en b . (wi&na-les)
- (3) In welke omstandigheid is deze herleiding nuttig? (na-les)

Voorbeeld 2: focus op consequenties van wisselen afhankelijke en onafhankelijke variabelen.

Wet van Fick (gebaseerd op vwo-examen biologie 2006 & 2013). Cystic fibrosis (CF) wordt ook wel taaislijmziekte genoemd, omdat het slijm dat onder andere in de luchtwegen wordt afgescheiden abnormaal taai is. Daardoor wordt het moeilijker afgevoerd uit de longen en blijft er meer slijm achter in de longblaasjes en vermindert de uitwisseling van gassen. Dat leidt tot een voortdurend gevoel van benauwdheid.

Factoren die van invloed zijn op de snelheid van de gaswisseling zijn de diffusieconstante (D), het diffusie-oppervlak (F), het concentratieverschil ($c_1 - c_2$) en de afstand of diffusieweg (A), zoals beschreven in de Wet van Fick: $V = D \cdot F \cdot \frac{c_1 - c_2}{A}$, waarbij V de diffusiesnelheid is.

- (1) Beredeneer aan de hand van de formule hoe via ieder van deze factoren (diffusiecoëfficiënt, diffusie-oppervlak, concentratieverschil en diffusieafstand) de diffusiesnelheid aangepast kan worden. (wi-les)
- (2) Geef via ieder van deze factoren een verklaring voor de benauwdheid van een CF-patiënt. (bio-les)

Merk op: Het gebruik van de letters V , A en F is verwarrend. Bij natuurkunde worden V voor volume gebruikt, A voor oppervlak en F voor kracht en zouden de eenheden vermeld worden.

Voorbeeld 3: focus op 'covariational reasoning' en biologie

schappelijke lessen). In deze laatste lessen zou dan ook de blending van beide perspectieven moeten gebeuren.

Onderzoek naar bevragen van formules en raamwerken

Met deze voorbeelden willen we illustreren hoe het redeneren met formules bij natuurwetenschappelijke contexten zowel de wiskunde als de natuurwetenschappelijke lessen kan verrijken. Het zou de samenhang tussen de vakken voor leerlingen vergroten. In de opdrachten hiernaast zien we hoe de formule 'bevraagd' wordt vanuit wiskundig en vanuit natuurwetenschappelijk perspectief. In het onderwijs zouden de vragen die Romer (1993) zichzelf stelt om wiskundige formules te doorzien voor leerlingen behulpzaam kunnen zijn. Het gaat dan om vragen als:

- Wat is betekenis van de gebruikte symbolen, welke grootheden vertegenwoordigen ze?
- Wat is de aard van de formule? Is de formule een definitie, is de formule gebaseerd op waarneming of model op basis van andere formules?
- Wat gebeurt er met afhankelijke variabele als een van de onafhankelijke variabelen groter of kleiner wordt en wat gebeurt er in grensgevallen?
- Welke grootheden zou je in deze formule verwachten? Welke benaderingen en/of idealisering worden gemaakt? Wanneer is deze formule te gebruiken?
- Kloppen de eenheden in de formule?

Het verdient aanbeveling om deze vakdidactische benaderingen nader te onderzoeken. Wellicht vormen het Sci-Math Sensemaking Framework dat recent in de VS ontwikkeld is (Kaldaras & Wieman, 2023), Duitse frameworks voor het interpreteren van wiskundige formules bij natuurwetenschappen (Geyer & Kuske-Janßen, 2019; Uhden et al., 2012) en de bevragsagenda van Romer (1993) aanknopingspunten voor verder onderzoek op het gebied van de samenhang van de bètavakken.

Voor de bronnen van dit artikel en een uitgebreidere versie, zie bij dit artikel op de website van NVON. ●