



College voor Toetsen en Examens

WISKUNDE B VWO

SYLLABUS CENTRAAL EXAMEN 2018 (BIJ HET NIEUWE
EXAMENPROGRAMMA)

(voor pilotscholen ook examen 2017)

Nader vastgesteld 3

Versie 2, april 2016

Samenstelling syllabuscommissie:

Bert Zwaneveld	-	voorzitter (Open Universiteit)
Jos Tolboom	-	secretaris (SLO)
Ruud Stolwijk	-	toetsdeskundige (Cito)
Peter van Wijk	-	cTWO
Frank van den Heuvel	-	docent (NVvW)
Marianne Lambriex	-	docent
Juan Dominguez	-	docent pilotschool
Kees Rijke	-	docent
Alma Taal Muskee	-	docent

Verantwoording:

© 2016 College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo, Utrecht.

Alle rechten voorbehouden. Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Inhoud

Voorwoord	5
1 Inleiding	6
1.1 Wiskunde B in de tweede fase	6
1.2 Het centraal examen wiskunde B	6
1.3 Totstandkoming syllabus	6
1.4 Domeinindeling	7
2 Specificaties	8
2.1 Toelichting op de specificaties	8
2.1.1 Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden	8
2.1.2 Nauwkeurigheid en afronden	8
2.1.3 Voorbeeldopgaven en examenopgaven	8
2.1.4 Algebraïsche vaardigheden	9
2.1.5 ICT	9
2.1.6 Formulelijst	9
2.2 Specificaties	10
3 Voorbeeldopgaven en examenopgaven	21
Bijlage 1 Examenprogramma	33
Het eindexamen	33
De examenstof	33
Bijlage 2 Examenwerkwoorden	36
Bijlage 3 Begrippenlijst	38
Bijlage 4 Algebraïsche vaardigheden	44
Bijlage 5 Lijst van formules die in het examen wordt opgenomen	49

Voorwoord

De minister heeft de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In het examenprogramma zijn de exameneenheden aangewezen waarover het centraal examen (CE) zich uitstrekt: het CE-deel van het examenprogramma. Het examenprogramma geldt tot nader order.

Het College voor Toetsen en Examens (CvTE) geeft in een syllabus, die in beginsel jaarlijks verschijnt, een toelichting op het CE-deel van het examenprogramma. Behalve een beschrijving van de exameneisen voor een centraal examen kan een syllabus verdere informatie over het centraal examen bevatten, bijvoorbeeld over een of meer van de volgende onderwerpen: specificaties van examenstof, begrippenlijsten, bekend veronderstelde onderdelen van domeinen of exameneenheden die verplicht zijn op het schoolexamen, bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw, bijzondere vormen van examinering (zoals computerexamens), voorbeeldopgaven, toelichting op de vraagstelling, toegestane hulpmiddelen.

Ten aanzien van de syllabus is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar zijn aard is een syllabus dus niet een volledig gesloten en afgebakende beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen in het verlengde daarvan ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholingsinstanties. De syllabus is niet van belang voor het schoolexamen. Daarvoor zijn door de SLO handreikingen geproduceerd die niet in deze uitgave zijn opgenomen.

Deze syllabus geldt voor het examenjaar 2018. Syllabi van eerdere jaren zijn niet meer geldig en wijken van deze versie af. Voor het examenjaar 2019 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld. Een syllabus kan zo nodig ook tussentijds worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekendgemaakt worden. Kijkt u voor alle zekerheid jaarlijks in september op Examenblad.nl. In de syllabus wordt een dergelijke verandering met blauw gemarkeerd. In deze syllabus zijn wijzigingen ten opzichte van de nader vastgestelde syllabus die vorig jaar is gepubliceerd, weergegeven in groen. Het CvTE publiceert uitsluitend digitale versies van de syllabi. Dit gebeurt via Examenblad.nl (www.examenblad.nl), de officiële website voor de examens in het voortgezet onderwijs.

Het CvTE stelt het aantal en de tijdsduur van de toetsen van het centraal examen vast en de wijze waarop het centraal examen wordt afgenomen. Deze vaststelling wordt gepubliceerd in het rooster voor de centrale examens en in de Septembermededeling. Voor opmerkingen over syllabi houdt het CvTE zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan info@hetcvte.nl of aan CvTE, Postbus 315, 3500 AH Utrecht.

De voorzitter van het College voor Toetsen en Examens,
Drs. P.J.J. Hendrikse

1 Inleiding

Deze syllabus specificeert de eindtermen van het CE-deel van het nieuwe examenprogramma wiskunde B vwo. In dit verband wordt eerst kort de achtergrond van het nieuwe programma beschreven.

1.1 Wiskunde B in de tweede fase

Het vak wiskunde B is een verplicht profielvak in het profiel Natuur en Techniek. Het neemt daar plaats in naast natuurkunde, scheikunde en één profielkeuzevak, te kiezen uit wiskunde D, biologie, informatica en natuur, leven & technologie. In de profielen Natuur en Gezondheid, Economie en Maatschappij en Cultuur en Maatschappij is wiskunde B een keuze-examenvak. Het is in het eerste tijdvak niet mogelijk wiskunde B te combineren met een van de andere wiskundeprogramma's, met uitzondering van wiskunde D.¹

De omvang van het vak wiskunde B is voor het vwo 600 SLU. Hiervan beslaat het in deze syllabus gespecificeerde CE-deel ongeveer 90%. Bij de totstandkoming van de syllabus is een inschatting gemaakt van de studielast die nodig is om de beschreven stof aan te leren.

1.2 Het centraal examen wiskunde B

De zitting en de duur van het centraal examen worden in juni 2016 gepubliceerd op www.examenblad.nl. Ook wordt daar dan een lijst gepubliceerd met hulpmiddelen die bij het examen zijn toegestaan. In februari 2015 is een vooruitblik op de regeling toegestane hulpmiddelen gegeven. Ook deze is te vinden op Examenblad.

In bijlage 2 is een lijst opgenomen van de specifieke betekenissen van de in het centraal examen gebruikte examenwerkwoorden voor alle wiskundevakken havo/vwo met een centraal examen. Deze lijst is niet uitputtend.

1.3 Totstandkoming syllabus

In het kader van de vernieuwing van het onderwijs in de vijf bètavakken (biologie, natuurkunde, NLT, scheikunde en wiskunde) heeft het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap in november 2006 de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs ingesteld.² Deze commissie had de opdracht een integraal examenprogramma te ontwerpen en te toetsen in een innovatietraject.

In 2009 is door deze commissie onder meer een concept vernieuwd examenprogramma wiskunde B geformuleerd. Bij dit concept-examenprogramma is door een breed samengestelde syllabuscommissie wiskunde B een werkversie van een syllabus ontwikkeld. Hierbij heeft de syllabuscommissie rekening gehouden met de uitvoerbaarheid van het programma en de uitgangspunten van cTWO:

¹ Op dit moment (juni 2016) is een wijziging in het Examenbesluit in behandeling, die het combineren van meerdere wiskundeprogramma's wel mogelijk maakt. Totdat de wijziging in het Examenbesluit een feit is, is de situatie zoals hierboven beschreven. Leerlingen kunnen gebruik maken van de nu geldende gedoogafpraak die de staatssecretaris heeft gemaakt met de schooldecanen, inhoudend dat het profiel vak wordt afgelegd in het eerste tijdvak en het extra vak in het tweede tijdvak.

² Zie cTWO (2012) *Denken en doen, Wiskunde op havo en vwo per 2015, Eindrapport van de vernieuwingscommissie cTWO*. Utrecht: cTWO.
Zie ook cTWO (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

Het vak bereidt voor op universitaire vervolgstudies met een exacte signatuur, zoals bètawetenschappen, technische wetenschappen en econometrie. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden, formulevaardigheden, redeneren, bewijzen en toepassen in authentieke situaties die passen bij examenprogramma wiskunde B – te weten modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen – alsmede voor het functioneel gebruiken van ICT daarbij. Hiermee wordt de kern van de vernieuwing weergegeven.

Zie voor een nadere uitwerking van de genoemde wiskundige vaardigheden ook subdomein A3 en de specificaties daarbij.

De eerste concepten van het examenprogramma, de syllabus en centrale examens zijn in de periode 2009-2012 getest in een pilot. De uitkomsten van de pilot hebben geleid tot herzieningen van het examenprogramma en de syllabus.

Door middel van een landelijke veldraadpleging is de mening van wiskundedocenten en andere betrokkenen over de nieuwe syllabus gepeild. De resultaten van deze veldraadpleging zijn door de syllabuscommissie gewogen en in deze syllabus verwerkt.

De syllabi voor wiskunde A, B en C zijn onderling afgestemd voor wat betreft format en inhoud.

1.4 Domeinindeling

Het examenprogramma staat in bijlage 1. Het betreft hier het programma met globale eindtermen, waarvan het CE-deel in hoofdstuk 2 van deze syllabus wordt gespecificeerd.

In de onderstaande tabel staat vermeld welke domeinen in het CE geëxamineerd kunnen worden:

Domein	Subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden		X	X	
B Functies, grafieken en vergelijkingen		X		X
C Differentiaal- en integraalrekening		X		X
D Goniometrische functies		X		X
E Meetkunde met coördinaten	E1: Meetkundige vaardigheden	X	X	
	E2: Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde	X		X
	E3: Vectoren en inproduct	X		X
	E4: Toepassingen	X		X
F Keuzeonderwerpen			X	

2 Specificaties

2.1 Toelichting op de specificaties

2.1.1 *Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden*

Bij de specificatie van de globale eindtermen is onderscheid gemaakt tussen parate vaardigheden en productieve vaardigheden. Bovendien is bij een aantal subdomeinen opgenomen over welke parate kennis de kandidaat dient te beschikken. Deze indeling is bedoeld om aan te geven wat het verwachte kennis- en beheersingsniveau van de kandidaat is.

Met parate vaardigheden wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat routinematig moet beheersen.

Bij productieve vaardigheden is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.

Bij parate kennis gaat het om kennis waarover de kandidaat dient te beschikken en die niet uit de formuleringen van de parate en/of productieve vaardigheden blijkt. De opsomming van parate kennis is daarmee een aanvulling op de parate en productieve vaardigheden. Parate kennis die bij een subdomein wordt genoemd, kan ook bij andere subdomeinen voorkomen en wordt dan ook binnen het totale CE-deel van het examenprogramma als parate kennis beschouwd.

In bijlage 3 staat voor de verschillende wiskundevakken een overzicht van de wiskundige begrippen die bekend verondersteld worden bij het centraal examen. De begrippen die in dit overzicht aangegeven worden kunnen zonder toelichting worden gebruikt in het centraal examen. Dit overzicht is niet uitputtend.

2.1.2 *Nauwkeurigheid en afronden*

Als in een examenopgave niet vermeld is in welke nauwkeurigheid het antwoord gegeven dient te worden, dient de kandidaat die nauwkeurigheid uit de probleemsituatie af te leiden. Het kiezen van een passende maateenheid valt hieronder. Als de probleemsituatie dit toelaat, mag een nauwkeuriger antwoord gegeven worden dan de nauwkeurigheid die de kandidaat uit de probleemsituatie afgeleid zou kunnen hebben. Het correctievoorschrift geeft hier uitsluitel over.

Een kandidaat kan uit de probleemsituatie afleiden wanneer afronden volgens de gebruikelijke afrondingsregels (6,4 wordt 6 en 6,5 wordt 7) niet van toepassing is. Een kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en dient hiernaar te handelen.

2.1.3 *Voorbeeldopgaven en examenopgaven*

In hoofdstuk 3 worden de specificaties per (sub)domein geïllustreerd door middel van voorbeeldopgaven en examenopgaven. In dat hoofdstuk wordt dit verder toegelicht.

2.1.4 *Algebraïsche vaardigheden*

Bij de specificaties is ervan uitgegaan dat de kandidaten bekend zijn met de vereiste algebraïsche vaardigheden. Voor alle wiskundevakken havo/vwo met een centraal examen wordt een overzicht van deze algebraïsche vaardigheden gegeven in bijlage 4. Hoewel bij het samenstellen van dit overzicht de grootst mogelijke nauwkeurigheid is nagestreefd, kan niet gegarandeerd worden dat deze uitputtend is.

2.1.5 *ICT*

In het CE wordt met ICT de grafische rekenmachine bedoeld. Zie hiervoor te zijner tijd de Vooruitblik en Regeling toegestane hulpmiddelen (zie ook paragraaf 1.2).

2.1.6 *Formulelijst*

In bijlage 5 staat de lijst van formules die wordt opgenomen in het centraal examen.

2.2 Specificaties

Domein A Vaardigheden

Subdomein A1 Algemene vaardigheden

De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan

1. doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken;
2. adequaat schriftelijk rapporteren over onderwerpen uit de wiskunde.

Subdomein A2 Profielspecifieke vaardigheden

De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar het oorspronkelijke probleem terugvertalen.

De kandidaat kan

1. een probleemsituatie in een wiskundige, natuurwetenschappelijke of maatschappelijke context analyseren, gebruik makend van relevante begrippen en theorie vertalen in een vakspecifiek onderzoek, dat onderzoek uitvoeren, en uit de onderzoeksresultaten conclusies trekken;
2. een realistisch probleem in een context analyseren, inperken tot een hanteerbaar probleem, vertalen naar een wiskundig model, modeluitkomsten genereren en interpreteren en het model toetsen en beoordelen;
3. met gegevens van wiskundige en natuurwetenschappelijke aard consistente redeneringen opzetten.

Subdomein A3 Wiskundige vaardigheden

De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige denkactiviteiten – waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

De kandidaat

1. beheerst de rekenregels;
2. beheerst de specifieke algebraïsche vaardigheden;
3. heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren;
4. kan wiskundige informatie ordenen en in probleemsituaties de wiskundige structuur onderkennen;
5. kan bij een gegeven probleemsituatie een model opstellen in wiskundige termen;
6. kan op basis van een gegeven probleemsituatie een schatting maken van de uitkomst zonder deze uitkomst exact te berekenen;
7. kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren binnen de context;
8. kan vakspecifieke taal interpreteren en gebruiken;
9. kan de correctheid van wiskundige redeneringen verifiëren;
10. kan eenvoudige wiskundige redeneringen correct onder woorden brengen;

11. kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij het geven van wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen;
12. kan antwoorden afronden op een voorgeschreven nauwkeurigheid dan wel op een nauwkeurigheid die past bij de probleemsituatie.³

Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen

Subdomein B1 Formules en functies

De kandidaat kan formules interpreteren en bewerken, bij een verband tussen twee variabelen een grafiek tekenen in een assenstelsel en bepalen of een gegeven formule herschreven kan worden als functievoorschrift.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de voorwaarden waaronder een verband een functie is.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. een formule herschrijven tot een gelijkwaardige formule;
2. een formule – indien mogelijk – herleiden tot een functievoorschrift;
3. bij een verband tussen twee variabelen een grafiek tekenen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

4. formules combineren tot een nieuwe formule;
5. aan de hand van een formule uitspraken doen over de bijbehorende probleemsituatie.

Subdomein B2 Standaardfuncties

De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van de volgende standaardfuncties: machtsfuncties met rationale exponenten, exponentiële functies, logaritmische functies, goniometrische functies en de absolute-waardefunctie en kan van deze verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen en gebruiken.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de grafieken en karakteristieke eigenschappen van machtsfuncties met rationale exponenten $f(x) = x^p$, in het bijzonder die van de wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$;
- de grafieken en karakteristieke eigenschappen van exponentiële functies $f(x) = a^x$ en van logaritmische functies $f(x) = {}^a \log(x)$, beide ook met grondtal e en in verband hiermee de begrippen grondtal en exponent;
- de grafieken en karakteristieke eigenschappen van goniometrische functies, te weten $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ en $f(x) = \tan(x)$, en in verband hiermee de begrippen radiaal, periode, amplitude en evenwichtsstand;

³ Zie de toelichting in paragraaf 2.1.1.2.

- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de absolute-waardefunctie
 $f(x) = |x|$;
- de karakteristieke eigenschappen van functies: domein, bereik, nulpunt, extreem, minimum, maximum, stijgen, dalen, toenemend of afnemend stijgen of dalen;
- de karakteristieke eigenschappen van grafieken: snijpunt met de x -as, snijpunt met de y -as, top, buigpunt, symmetrie en asymptotisch gedrag inclusief horizontale, verticale en scheve asymptoot.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. van een standaardfunctie de grafiek tekenen en daarbij gebruik maken van de karakteristieke eigenschappen van de functie en haar grafiek;
2. de verschillende schrijfwijzen van tweedegraads functies gebruiken;
3. bij een grafiek of een tabel van een standaardfunctie, een lineaire functie of een kwadratische functie het functievoorschrift opstellen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

4. karakteristieke eigenschappen van een standaardfunctie en haar grafiek gebruiken bij het oplossen van problemen;
5. een exponentiële functie beschrijven met behulp van de termen beginwaarde en groeifactor;
6. bij exponentiële groeiprocessen de verdubbelingstijd en de halveringstijd bepalen.

Subdomein B3 Functies en grafieken

De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, combineren, de bijbehorende grafieken tekenen en aan de hand van een functievoorschrift zonder hulpmiddelen kwalitatieve uitspraken doen over de functie en haar grafiek.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. op een grafiek een translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van x - of y -as uitvoeren;
2. het functievoorschrift opstellen dat hoort bij een nieuwe grafiek die is ontstaan na translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van x - of y -as van een gegeven grafiek;
3. de samenhang tussen een translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van x - of y -as van een grafiek en de verandering van het bijbehorende functievoorschrift gebruiken;
4. functievoorschriften combineren door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en/of delen;
5. functies samenstellen door middel van een ketting en het functievoorschrift opstellen van de samengestelde functie.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

6. van functies en hun grafieken karakteristieke eigenschappen bepalen ;
7. bij een gegeven machtsverband een formule opstellen, ermee rekenen en over het machtsverband redeneren;

8. bij een in een probleemsituatie beschreven verband een passend functievoorschrift opstellen.
9. een functievoorschrift dat een parameter bevat hanteren als een verzameling van functievoorschriften

Subdomein B4 Inverse functies

De kandidaat kan de inverse van een functie begripsmatig hanteren, opstellen en gebruiken.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de voorwaarden waaronder een functie een inverse functie heeft.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. van de machtsfuncties, de exponentiële functies en de logaritmische functies het functievoorschrift van de inverse functie opstellen;
2. bij de grafiek van een functie de grafiek van de inverse functie tekenen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

3. van een samengestelde functie het functievoorschrift van de inverse functie opstellen;
4. de eigenschappen van de inverse functie en haar grafiek interpreteren in een gegeven probleemsituatie.

Subdomein B5 Vergelijkingen en ongelijkheden

De kandidaat kan vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen en de oplossingen interpreteren.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip stelsel van vergelijkingen;
- de abc-formule.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot een lineaire vergelijking;
2. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot een kwadratische vergelijking;
3. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot het type $x^a = c$ of $|x| = c$;
4. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot het type ${}^s \log(x) = c$ of $a^x = c$;
5. een vergelijking oplossen van het type $f(x) = g(x)$ waarbij f en g functies zijn zoals genoemd in subdomein B2;
6. een ongelijkheid oplossen van het type $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ of $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ waarbij f en g functies zijn zoals genoemd in subdomein B2;
7. een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden oplossen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

8. een vergelijking dan wel een ongelijkheid opstellen aan de hand van een gegeven probleemsituatie, de vergelijking of ongelijkheid oplossen en de oplossingen van deze vergelijking of ongelijkheid interpreteren;
9. een vergelijking met een parameter oplossen en de oplossing schrijven als functie van de parameter;
10. een ongelijkheid oplossen van de vorm $f(x) < c$, $f(x) \leq c$ of $f(x) > c$, $f(x) \geq c$, waarbij f een samengestelde functie is, zoals bedoeld in B3.5.

Subdomein B6 Asymptoten en limietgedrag van functies

De kandidaat kan het asymptotisch gedrag van functies bepalen en dit met limietberekening aantonen.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip limiet in verband met het gedrag van een functie;
- de begrippen linker- en rechterlimiet.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. asymptoten van de grafieken van standaardfuncties bepalen;

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

2. met behulp van limieten onderzoek doen naar horizontale, verticale en scheve asymptoten van grafieken van functies;
3. onderzoek doen naar linker- en rechterlimieten en naar perforaties.

Domein C Differentiaal- en integraalrekening

Subdomein C1 Afgeleide functies

De kandidaat kan de eerste en tweede afgeleide van een functie begripmatig interpreteren en gebruiken om die functie te onderzoeken en de eerste en tweede afgeleide gebruiken in toepassingen.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- notaties voor de afgeleide en de tweede afgeleide van een functie.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. de afgeleide gebruiken bij het opstellen van de vergelijking van de raaklijn in een punt van de grafiek van een functie;
2. een lokale afgeleide interpreteren als de helling of steilheid van een grafiek in een punt;
3. de afgeleide gebruiken voor het bestuderen van stijgen of dalen van functiewaarden;
4. de afgeleide gebruiken bij het verifiëren en bij het bepalen van extremen van een functie;
5. de grafiek van de afgeleide schetsen indien de grafiek van de functie is gegeven;

- de grafiek van de functie schetsen indien de grafiek van de afgeleide is gegeven;
- de tweede afgeleide gebruiken voor het bestuderen van toenemend of afnemend stijgen of dalen van functiewaarden;
- de tweede afgeleide gebruiken om buigpunten te berekenen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- gebruik maken van de relatie tussen afgeleide en raaklijn in een probleemsituatie;
- een optimaliseringsprobleem vertalen in een formule en dit probleem vervolgens met behulp van de afgeleide functie of numeriek-grafisch oplossen.

Subdomein C2 Technieken voor differentiëren

De kandidaat kan de eerste en tweede afgeleide van functies bepalen met behulp van de regels voor het differentiëren en daarbij algebraïsche technieken gebruiken.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de afgeleide van de standaardfuncties;
- het begrip differentiëren voor het bepalen van de afgeleide.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

- bij het bepalen van de afgeleide gebruik maken van de afgeleide van de standaardfuncties;
- bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële en logaritmische functies het getal e en de natuurlijke logaritme gebruiken;
- voor het bepalen van de afgeleide de som-, verschil-, product-, quotiënt- en kettingregel gebruiken;
- het verband gebruiken tussen de afgeleide van een functie $f(x)$ en de afgeleide van $c \cdot f(x) + d$ of de afgeleide van $f(c \cdot x + d)$.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- een combinatie van som-, verschil-, product- en/of quotiëntregel gebruiken bij het bepalen van een afgeleide;
- de kettingregel gebruiken in combinatie met de som-, verschil-, product- en/of quotiëntregel bij het bepalen van een afgeleide.

Subdomein C3 Integraalrekening

De kandidaat kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de begrippen integrand, primitieve functie en bepaalde integraal;
- de notatie $\int_a^b f(x)dx$;

- de hoofdstelling van de integraalrekening: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, waarbij F een primitieve functie van f is.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. een bepaalde integraal exact berekenen indien de integrand de gedaante $c \cdot f(x) + d$ of $f(c \cdot x + d)$ heeft, waarbij f een machtsfunctie, een exponentiële functie, de functie sinus of de functie cosinus is en indien de integrand de som van twee of meer van deze functies is;
2. een bepaalde integraal benaderen met behulp van ICT;
3. controleren of een gegeven functie F een primitieve is van een functie f .

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

4. voor de berekening van de oppervlakte van een vlakdeel een bepaalde integraal opstellen;
5. voor de berekening van de inhoud van een omwentelingslichaam dat ontstaat door een vlakdeel te wentelen om de x -as of de y -as een bepaalde integraal opstellen;
6. de uitkomst van een bepaalde integraal interpreteren;
7. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ interpreteren als functie van x .

Domein D Goniometrische functies

De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen oplossen en hierbij de periodiciteit met inzicht gebruiken.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het sinusmodel in de vormen $f(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c))$ en $f(x) = d + a \cdot \cos(b(x - c))$ met als grafiek een sinusoïde;
- de exacte waarden van $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$ waarbij x een veelvoud van $\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$ is;
- formules die de symmetrie-eigenschappen weergeven van de sinus-, cosinus- en tangens grafiek;
- formules die weergeven hoe de sinus- en cosinusgrafiek door translatie uit elkaar ontstaan.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. graden omrekenen in radialen en omgekeerd;
2. de grafiek tekenen van een sinusmodel;
3. van een sinusoïde het bijbehorende functievoorschrift opstellen;

4. formules herleiden met behulp van de symmetrie-eigenschappen van de sinus-, cosinus- en tangensgrafiek;
5. formules herleiden met behulp van translaties waarbij de sinus- en cosinusgrafiek uit elkaar ontstaan;
6. vergelijkingen oplossen van de vorm $\sin(x) = c$, $\cos(x) = c$, $\tan(x) = c$ en hierbij periodiciteit en symmetrie gebruiken.
7. vergelijkingen oplossen van de vorm $f(x) = c$ met $f(x)$ een sinusmodel en hierbij periodiciteit en symmetrie gebruiken;
8. vergelijkingen oplossen van het type $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$, $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$ en $\tan(f(x)) = \tan(g(x))$, waarbij f en g lineaire functies van x zijn en hierbij periodiciteit en symmetrie gebruiken;
9. ongelijkheden oplossen van het type $\sin(f(x)) \leq c$, $\sin(f(x)) < c$, $\sin(f(x)) > c$, $\sin(f(x)) \geq c$
 $\cos(f(x)) \leq c$, $\cos(f(x)) < c$, $\cos(f(x)) > c$, $\cos(f(x)) \geq c$
 $\tan(f(x)) \leq c$, $\tan(f(x)) < c$, $\tan(f(x)) > c$, $\tan(f(x)) \geq c$
waarbij f en g lineaire functies zijn.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

10. in een gegeven probleemsituatie voor een periodiek verschijnsel een sinusmodel opstellen, de bijbehorende sinusoïde tekenen, berekeningen uitvoeren aan dit model en de resultaten terugvertalen naar de probleemsituatie;
11. een harmonische trilling opvatten als een sinusoïde, er een passend functievoorschrift voor opstellen en de begrippen frequentie en trillingstijd daarbij correct hanteren;
12. de som- en verschilformules en de verdubbelingsformules gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen;
13. de formules $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ en $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen;
14. symmetrie-eigenschappen en translaties gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen.

Domein E Meetkunde met coördinaten

Subdomein E1 Meetkundige vaardigheden

De kandidaat kan meetkundige eigenschappen van objecten onderzoeken en bewijzen en kan daarbij gebruik maken van meetkundige en algebraïsche technieken en van ICT.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip afstand als de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen twee meetkundige figuren;
- de volgende meetkundige stellingen:
 - Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omschreven cirkel.

- Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omschreven cirkel is, is rechthoekig.
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.
- Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.
- De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. de stelling van Pythagoras gebruiken om de afstand tussen twee punten te berekenen;
2. met gelijkvormigheid de lengte van lijnstukken berekenen;
3. sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het berekenen van de grootte van hoeken en de lengte van zijden in een rechthoekige driehoek;
4. de sinus- en cosinusregel gebruiken voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken in een driehoek;
5. (een gedeelte van) een meetkundige figuur algebraïsch beschrijven;
6. van een beschreven meetkundig probleem een tekening maken met daarin verwerkt de relevante gegevens.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

7. meetkundige technieken gebruiken om eigenschappen van figuren te onderzoeken en te bewijzen;
8. algebraïsche technieken gebruiken om eigenschappen van figuren te onderzoeken en te bewijzen.

Subdomein E2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde

De kandidaat kan eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere geschikte figuren onderzoeken met behulp van algebraïsche voorstellingen, kan in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en kan algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de vergelijking van een lijn in de vorm $y = mx + n$ en in de vorm $ax + by = c$;
- de begrippen richtingscoëfficiënt en loodlijn;
- de eigenschap dat het product van de richtingscoëfficiënten van twee loodrecht op elkaar staande lijnen gelijk is aan -1 en omgekeerd;
- de begrippen stelsel van twee vergelijkingen, strijdig stelsel en afhankelijk stelsel;
- van een cirkel de vergelijking in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$;
- de parametervoorstelling van een lijn $x(t) = a \cdot t + c$ en $y(t) = b \cdot t + d$;
- de parametervoorstelling van een cirkel $x(t) = p + r \cdot \cos(t)$ en $y(t) = q + r \cdot \sin(t)$;

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. de afstand tussen punten, lijnen en cirkels berekenen;

- de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- de vergelijking of de parametervoorstelling van een lijn opstellen;
- de vergelijking of de parametervoorstelling van een cirkel opstellen;
- uit de vergelijking van een cirkel de straal van de cirkel en de coördinaten van het middelpunt afleiden;
- vanuit een parametervoorstelling van een lijn of cirkel een vergelijking opstellen en vanuit een gegeven vergelijking van een lijn of cirkel een parametervoorstelling opstellen;
- de coördinaten van de snijpunten van twee lijnen, van twee cirkels en van een lijn en een cirkel berekenen;
- de oplosbaarheid van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in verband brengen met de onderlinge ligging van rechte lijnen in het platte vlak;
- onderzoeken hoeveel gemeenschappelijke punten een lijn en een cirkel hebben;
- de vergelijking van een raaklijn met gegeven richting aan een cirkel opstellen;
- de vergelijking van een raaklijn door een gegeven punt (op of buiten de cirkel) aan een cirkel opstellen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- het verband gebruiken tussen een transformatie van een lijn of een cirkel en een substitutie in de bijhorende vergelijking of parametervoorstelling;
- meetkundige problemen oplossen met gebruikmaking van bovengenoemde algebraïsche technieken.

Subdomein E3 Vectoren en inproduct

De kandidaat kan met behulp van vectoren en inproducten eigenschappen van figuren in het vlak afleiden en berekeningen uitvoeren.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip vector als grootte met lengte en richting en als getallenpaar, notatie:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix};$$

- de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen en componenten van een vector;
- het begrip inproduct (of inwendig product) van twee vectoren als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta;$$

- de vectorvoorstelling van een lijn $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ met steunvector $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ en

$$\text{richtingsvector} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$$

- het zwaartepunt van een aantal punten als eindpunt van de plaatsvector die het gewogen gemiddelde is van de plaatsvectoren van die punten.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

- de vectorvoorstelling van een lijn opstellen;

2. rekenen en redeneren met vectoren die beschreven zijn door grootte en richting of door middel van kentallen;
3. vectoren ontbinden in componenten, scalair vermenigvuldigen, bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken, zowel meetkundig als met behulp van berekening;
- ~~4. met behulp van vectoren zwaartepunten bepalen;~~
4. het inproduct gebruiken voor de berekening van hoeken en afstanden;
5. de vergelijking, de parametervoorstelling en de vectorvoorstelling van een lijn in elkaar omrekenen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

6. berekeningen uitvoeren aan de baan van een bewegend punt die beschreven is door een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$;
7. de vectoriële snelheid en versnelling alsook de baansnelheid en baanversnelling van een bewegend punt berekenen;
8. een vergelijking van de raaklijn opstellen aan de baan van een bewegend punt.
9. met behulp van vectoren zwaartepunten bepalen;

Subdomein E4 Toepassingen

De kandidaat kan de aangegeven technieken toepassen in geschikte natuurwetenschappelijke en technische situaties.

3 Voorbeeldopgaven en examenopgaven

In dit hoofdstuk worden voorbeeldopgaven en examenopgaven gegeven ter verduidelijking van met name de specificaties in de categorie 'productieve vaardigheden'.

De examenopgaven

Om een indicatie te geven van het niveau waarop kandidaten deze specificaties dienen te beheersen op het centraal examen, wordt zoveel mogelijk verwezen naar vragen uit opgaven afkomstig uit de reeds afgenomen pilotexamens 2012 en 2013, eerste en tweede tijdvak. Deze pilotexamens zijn te vinden op www.hetcvte.nl (via Onderwerpen – Centrale examens VO – Vakvernieuwingen – Wiskunde havo/vwo).

Daarnaast worden enkele examenopgaven genoemd die zijn ontleend aan oude examens. Ook deze zijn bedoeld ter verduidelijking van de specificaties en dienen tegelijkertijd als indicatie van het niveau van de opgaven. De genoemde examens zijn te vinden op www.examenblad.nl (onder de betreffende jaarring).

De voorbeeldopgaven

Deze opgaven zijn bedoeld ter illustratie van de specificaties, niet om het niveau aan te duiden. Deze opgaven zijn ontworpen voor de syllabus. In enkele gevallen zijn het bewerkingen van oude examenopgaven. Ook die bewerkingen zijn ter illustratie van de specificaties en niet om het niveau aan te duiden.

De voorbeeldopgaven zijn te vinden vanaf pagina 22.

Voorbeeldexamen

In 2017 zal op de pilotscholen voor het eerst een examen worden afgenomen bij deze definitieve syllabus. Dit examen kan als voorbeeldexamen voor 2018 gebruikt worden. Daarnaast kunnen eerder afgenomen pilotexamens een goed beeld geven van de te verwachten centrale examens vanaf 2018. Deze examens zijn geconstrueerd aan de hand van de werkversies van de syllabus bij het experimentele examenprogramma wiskunde B. Ook deze zijn te vinden op www.hetcvte.nl.

Subdomein B1 Formules en functies

Specificatie	Vraag in pilotexamen
1	2012-I-10, 2012-II-6, 2012-II-11, 2012-II-12, 2013-II-6, 2013-II-14
2	2012-I-13, 2013-I-3
3	
4	2012-I-10, 2012-I-13, 2013-I-4
5	2012-II-2, 2013-I-2

Relatie met subdomein A3

2012-I-10: in tegenstelling tot de corresponderende vraag in het reguliere examen 2012-I is hier niet de aanwijzing gegeven dat je een zijde x kunt noemen. Het modelleren wordt geheel aan de leerling overgelaten.

Subdomein B2 Standaardfuncties

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1		
2		
3	2012-I-4	
4		1, 2
5		3
6	2013-II-13	4

Relatie met subdomein A3

2012-I-4: in vergelijking met de reguliere versie veel minder informatie gegeven, waardoor de kandidaten meer wiskundig actief moeten zijn.

- 1 De functie f is gegeven door $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$. Toon aan dat dit een stijgende functie is.

Uitwerking

Methode 1:

Als x toeneemt, neemt e^x toe, dus $e^x + 1$ ook, dus $\frac{2}{e^x + 1}$ neemt af, dus $1 - \frac{2}{e^x + 1}$ neemt toe. Dus f is een stijgende functie.

Methode 2:

$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$. De teller en de noemer zijn voor elke x positief, dus de afgeleide

van f is voor elke x positief, dus f is een stijgende functie.

- 2 De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{10}{6 + 2\sin(x)}$. Bepaal het bereik van deze functie.

Uitwerking

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$, dus $-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$, dus $4 \leq 6 + 2\sin(x) \leq 8$, dus

$\frac{10}{4} \geq \frac{10}{6 + 2\sin(x)} \geq \frac{10}{8}$, dus het bereik van f is $\left[1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}\right]$.

- 3 In de nucleaire geneeskunde worden verschillende radioactieve stoffen gebruikt. De radioactiviteit van deze stoffen neemt exponentieel af. De stof iridium-192 heeft een groeifactor van 0,9907 per dag.
- Hoeveel procent van de oorspronkelijke radioactiviteit van iridium-192 is er na een jaar over?
 - Na hoeveel dagen is de radioactiviteit van iridium-192 gedaald tot onder 80% van de oorspronkelijke waarde.
- De stof kobalt-60 heeft een halveringstijd van 5,27 jaar.
- Stel een formule op voor de radioactiviteit R van kobalt-60 als functie van de tijd t (t in jaren). Neem als beginwaarde 100.

Uitwerking

a. $0,9907^{365} \approx 0,0330$. Dus er is ongeveer 3,30% over.

b. *Methode 1:*

$$0,9907^t = 0,80, \text{ dus } t = \frac{\log 0,80}{\log 0,9907} \approx 23,88, \text{ dus na 24 dagen.}$$

Methode 2:

Voer op de GR in $Y_1 = 0,9907^X$ en $Y_2 = 0,80$ en vind (met Intersect) dat de twee grafieken elkaar snijden bij $X \approx 24$ (of maak een tabel van beide functies).

c. Voor de groeifactor g geldt: $g^{5,27} = \frac{1}{2}$, dus $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5,27}} \approx 0,877$.

$$R = 100 \cdot 0,877^t$$

4 (Ontleend aan het centraal examen wiskunde B havo (pilot) 2012-I)

In 1930 bedroeg de CO₂-concentratie 300 parts per million (ppm). Hiervan was 285 ppm het natuurlijke niveau en 15 ppm de menselijke component. In 2000 was de CO₂-concentratie gestegen tot 370 ppm.

Een formule die de CO₂-concentratie vanaf 1 juli 1930 goed benadert is

$$C(t) = 15 \cdot 1,025^t + 285$$

Hierin is $C(t)$ de CO₂-concentratie in ppm en t de tijd in jaren na 1 juli 1930.

Bereken met behulp van deze formule de verdubbelingstijd van de CO₂-concentratie voor zover het de menselijke component betreft.

Uitwerking

De menselijke component van de CO₂-concentratie is $M(t) = 15 \cdot 1,025^t$.

Voor de verdubbelingstijd T geldt $M(t+T) = 2 \cdot M(t)$.

Dus $T = \frac{1}{\log 2} \log 2 = 28,1$, dat is ongeveer 28 jaar.

Subdomein B3 Functies en grafieken

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1	2013-I-9	
2	2013-I-9, 2013-II-7	
3	2013-I-10	
4		
5		
6	2012-I-10, 2012-I-13	
7		5
8		6, 7
9	2012-I-1	

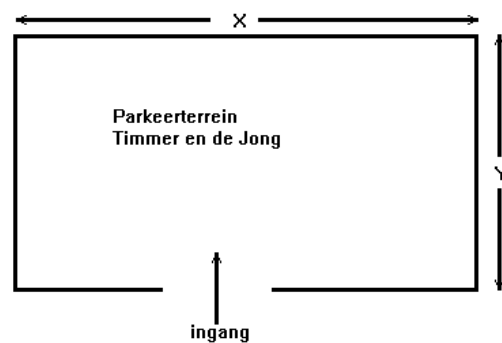
5 Bij experimenten met het opwekken van elektriciteit door middel van windmolens is onderzocht hoe het door de windmolens geleverde vermogen P afhangt van de lengte L van de wieken en van de windsnelheid v (bij gelijke luchtdichtheid). Bij een bepaald type windmolens bleek het opgewekte vermogen P (in W) evenredig te zijn met het kwadraat van de lengte van de wieken L (in m) en met de derdemacht van de windsnelheid v (in m/s).

- Stel voor een windmolen die $P = 6 \cdot 10^5$ W levert bij $L = 20$ m en $v = 12$ m/s het machtsverband op.
- Bereken met hoeveel procent het geleverde vermogen van een windmolen afneemt als de windsnelheid afneemt met 20%.

Uitwerking

- De gegevens invullen in $P = a \cdot L^2 \cdot v^3$ geeft $600000 = 691200a$ dus $a \approx 0,868$.
- $0,8^3 = 0,512$ dus 48,8% afname.

- 6 Supermarkt Timmer en De Jong gaat bij het nieuwe filiaal in Hardinxveld een parkeerterrein aanleggen van 1000 m^2 . Het terrein wordt rechthoekig. Aan de kant van de ingang komt een afrastering met stenen paaltjes. De aanleg hiervan kost €150,- per meter. De ingang zelf is 6 meter breed en kost € 3.000,-. Aan de andere drie kanten van het terrein komt een hekwerk dat € 100,- per meter kost. Het bestraten van het terrein kost € 80,- per m^2 . De totale kosten (in euro) voor de aanleg noemen we K . De lengte en breedte x en y zijn in meter. Zie voor de betekenis van x en de y de tekening.



- Toon aan dat $K = 96350$ als $x = 25$.
- De formule voor de kostenfunctie K kan geschreven worden in de vorm

$$K = a + bx + \frac{c}{x}. \text{ Hierin zijn } a, b \text{ en } c \text{ constanten.}$$

Bereken a , b en c .

Uitwerking

- ingang: 3000; afrastering: $19 \cdot 25$; hekwerk: $(925 + 2 \cdot 2000/25) \cdot 100$; bestrating $1000 \cdot 80$; dit geeft $2850 + 10500 + 80000 = 96350$.

- De oppervlakte: $xy = 1000$, dus $y = \frac{1000}{x}$.

$$K = 3000 + (x - 6) \cdot 150 + \left(x + 2 \cdot \frac{1000}{x}\right) \cdot 100 + 1000 \cdot 80 = 82100 + 250x + \frac{200000}{x} \text{ dus}$$

$$a = 82100, b = 250 \text{ en } c = 200000.$$

- 7 (Naar examen VWO Wiskunde B1 2001)

Een chauffeur moet met een vrachtwagen een traject van 100 km rijden. Zijn firma wil weten bij welke snelheid v (in km/uur) de totale vervoerskosten T (in euro) het laagst zijn. De vrachtwagen verbruikt bij een snelheid van 60 km/uur voor elke kilometer $\frac{1}{2}$ liter brandstof. Bij toename van de snelheid neemt het verbruik exponentieel toe: bij elke toename van de snelheid v met 10 km/uur stijgt het verbruik per kilometer met 10%. Het arbeidsloon van de chauffeur is 45 euro per uur. De brandstofkosten zijn 1,50 euro per liter.

De totale vervoerskosten T bestaan uit brandstofkosten en het arbeidsloon van de chauffeur.

- Toon aan dat de totale vervoerskosten T over het traject van 100 km bij een snelheid van 80 km/uur 147 euro bedragen.
- Stel een formule op die T geeft als functie van de snelheid v .

Uitwerking

a. $T(80) \approx 147$

b. Het brandstofverbruik per km is $\frac{1}{2} \cdot 1,10^{\frac{v-60}{10}}$.

$$\text{Dus } T = \frac{100}{v} \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 1,10^{\frac{v-60}{10}} \cdot 100 \cdot 1,50 = \frac{4500}{v} + 75 \cdot 1,10^{\frac{v-60}{10}}.$$

Subdomein B4 Inverse functies

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1	2013-I-10	
2		
3	2013-I-10	
4		8

8 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x-3} + 3$.

- Bepaal de asymptoot van de grafiek van de inverse functie.
- Op de grafiek van $f(x)$ ligt een punt met $y = 16$ waarin de helling van de grafiek 9,0 is. Van welk punt van de grafiek van de inverse functie weet je dan ook de helling en hoe groot is die?

Uitwerking

- De grafiek van f heeft horizontale asymptoot $y = 3$ dus de inverse heeft verticale asymptoot $x = 3$.
- Op de grafiek van f ligt het punt $(3 + {}^2\log 13, 16)$. Op de grafiek van de inverse ligt dan het punt $(16, 3 + {}^2\log 13)$ met helling $9,0^{-1} \approx 0,11$.

Subdomein B5 Vergelijkingen en ongelijkheden

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1	2012-I-12, 2013-I-1	
2	2012-I-6, 2012-I-11, 2012-I-12, 2012-I-15, 2013-I-11, 2013-I-13	
3	2013-II-4	
4	2013-II-15	
5	2013-I-16	
6		
7	2012-II-16	
8	2012-I-5, 2012-I-6, 2012-II-2, 2012-II-9, 2013-II-15	
9	2012-I-1, 2012-II-7, 2012-II-13	
10		9

9 Los exact op: $3^{5-2x} > 3\sqrt{3}$.

Uitwerking

Methode 1:

$3^{5-2x} > 3\sqrt{3}$, oplossen $3^{5-2x} = 3\sqrt{3}$, geeft $3^{5-2x} = 3^{\frac{3}{2}}$.

Dus $5 - 2x = \frac{3}{2}$, geeft $2x = \frac{7}{2}$, dus $x = \frac{7}{4}$.

Door invullen van een waarde voor x kleiner dan $\frac{7}{4}$ volgt het antwoord $x < \frac{7}{4}$.

Methode 2:

$3^{5-2x} > 3\sqrt{3}$, oplossen $3^{5-2x} = 3\sqrt{3}$, geeft $3^{5-2x} = 3^{\frac{3}{2}}$.

Dus $5 - 2x = \frac{3}{2}$, geeft $2x = \frac{7}{2}$, dus $x = \frac{7}{4}$.

Uit de plot van de grafiek volgt het antwoord $x < \frac{7}{4}$.

Opmerking: In het centraal examen is het toegestaan om bij een dergelijke vraag gebruik te maken van een plot op de grafische rekenmachine.

Subdomein B6 Asymptoten en limietgedrag van functies

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1		
2	2013-II-3	10
3	2012-I-12, 2012-II-6, 2013-II-3	11

10 De functie f is gegeven door $f(x) = 3x + 1 + \frac{6}{2x-4}$.

Bepaal de asymptoten van de grafiek van de functie f .

Uitwerking

De ene asymptoot is een verticale en die heeft vergelijking $x = 2$ (volgt uit noemer van de breuk is gelijk aan nul, dus $2x - 4 = 0$). De andere asymptoot is een scheve asymptoot met vergelijking $y = 3x + 1$ (want voor grote waarden van x "gaat de

breuk $\frac{6}{2x-4}$ naar 0").

11 Deze opgave gaat over de functie f gegeven door $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

- Bereken (indien mogelijk) de linker- en de rechterlimiet van f in $x = 0$.
- Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f ?
- Schets de grafiek van f .

Uitwerking

a. $\lim_{x \downarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$ en $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ dus $\lim_{x \downarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ('gaatje' (0,0))

- b. $\lim_{x \uparrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) = \infty$ en $\lim_{u \rightarrow \infty} e^u = \infty$ dus $\lim_{x \uparrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$ (asymptoot $x=0$)
- c. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ dus $y=1$ is de horizontale asymptoot
 Controleer de schets met behulp van een plot op de GR.

Subdomein C1 Afgeleide functies

Specificatie	Vraag in pilotexamen
1	2012-II-6
2	
3	
4	2012-I-15, 2012-II-8, 2012-II-13, 2013-I-8
5	
6	
7	
8	2013-II-5
9	2012-I-1
10	2012-I-10, 2012-II-3

Subdomein C2 Technieken voor differentiëren

Specificatie	Vraag in pilotexamen
1	2012-I-11, 2012-II-4, 2013-I-8, 2013-I-16
2	2012-I-1, 2012-II-8
3	2012-II-13, 2013-II-1
4	
5	2012-II-6, 2013-II-5
6	2012-I-1, 2012-I-14, 2012-II-8, 2013-I-3, 2013-I-8

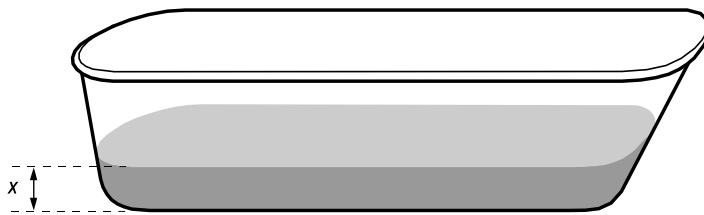
Relatie met subdomein A3

2012-II-4: de formule voor de snelheid is hier niet gegeven, in tegenstelling tot de corresponderende vraag in het reguliere examen.

Subdomein C3 Integraalrekening

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1	2012-I-5, 2012-I-8, 2012-II-1, 2012-II-13, 2013-II-2, 2013-II-8	
2	2012-I-3, 2013-I-14	
3		
4	2012-I-2, 2012-II-13, 2013-II-2, 2013-II-8	
5	2012-I-3, 2012-I-5, 2012-II-1, 2013-I-14	
6		12
7	2012-II-1	

12 De functie $C(x) = 2500\sqrt{x} - 70x$ geeft de oppervlakte van de waterspiegel (in cm^2) in een badkuip op een hoogte van x cm boven de bodem (zie figuur hieronder).



Onderzoek of de badkuip 500 liter water kan bevatten als je weet dat de hoogte van deze badkuip boven de bodem minstens 50 cm is.

Uitwerking

De hoeveelheid water in de badkuip als het water p cm hoog staat is

$$\int_0^p C(x) dx = \int_0^p 2500x^{0,5} - 70x dx = \left[\frac{2500}{1,5} x^{1,5} - 35x^2 \right]_0^p = \frac{2500}{1,5} p^{1,5} - 35p^2.$$

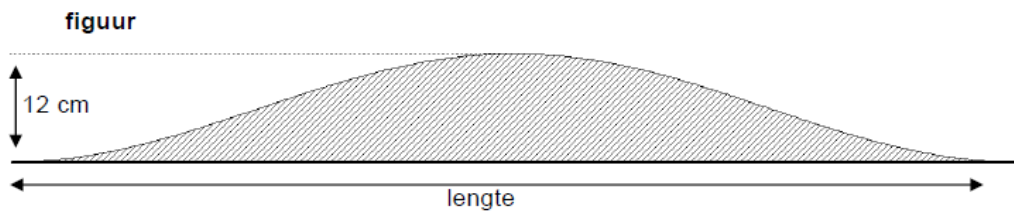
Dit moet gelijk zijn aan 500000. Met behulp van de GR vind je $p \approx 49,9$. Het past dus nèt aan.

Domein D Goniometrische functies

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1		
2		
3	2012-I-9	
4		
5		
6	2013-II-12	
7	2012-I-9, 2012-II-5	
8		
9		13
10		14
11	2013-I-7, 2013-II-11, 2013-II-12	
12	2013-I-7, 2013-II-11	
13		15, 16

13 (opgave F van de voorbeeldexamenopgaven, uit de werkversie van de pilotsyllabus vwo wiskunde A, blz. 17)

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm, zie onderstaande figuur.



De verkeersdrempel van de figuur hierboven hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur en beslaat precies één periode van een sinusoïde. Deze drempel is exact 4 meter lang en 12 cm hoog.

Het bijbehorende sinusmodel is $h = 0,06 + 0,06 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)$ (x en h in meter).

Een verkeersdrempel die behoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is exact 12 meter lang en 14 cm hoog. Bereken algebraïsch in cm nauwkeurig over welke horizontale afstand deze verkeersdrempel meer dan 10 cm hoog is.

Uitwerking

Laat het sinusmodel van deze drempel $h = d + a \cdot \sin(b(x - c))$ zijn.

Hiervan is de periode 12 m. Dus $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Uit de hoogte van 0,14 m volgt $a = d = 0,07$.

Na een kwart van de periode gaat de sinusoïde door de evenwichtsstand, dus $c = 3$.

Stel: bij $x = x_1$ en $x = x_2$ is de hoogte van de drempel 10 cm.

Dat betekent dat $0,07 + 0,07 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(x_1 - 3)\right) = 0,1$. Hieruit volgt dat $\sin\left(\frac{\pi}{6}(x_1 - 3)\right) = \frac{3}{7}$.

Dat betekent dat $\frac{\pi}{6} \cdot (x_1 - 3) \approx 0,4429$. Dus $x_1 \approx 3,8459$; $x_2 = 12 - x_1 \approx 8,1541$.

Omdat $x_2 - x_1 \approx 8,1541 - 3,8459 \approx 4,3082$, is het antwoord op de vraag 431 (cm) of 4,31 m.

- 14 De punten P en Q voeren elk een harmonische trilling uit. Beide trillingen hebben verschillende amplitude en frequentie.

Voor de uitwijking u_P van P uit de evenwichtsstand op tijdstip t geldt

$$u_P = 5 \sin\left(\frac{1}{6}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right).$$

De trilling van punt Q heeft een 2 keer zo grote amplitude, een 3 keer zo grote frequentie en $u_Q(0) = 10$.

Geef een formule voor de uitwijking u_Q van Q uit de evenwichtsstand op tijdstip t .

Uitwerking

De amplitude is $2 \cdot 5 = 10$, de hoekfrequentie $3 \cdot \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi$ en bij $t = 0$ is de uitwijking maximaal.

Een vergelijking is bijvoorbeeld $u_Q = 10 \sin\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$ of $u_Q = 10 \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$.

15 Los exact op: $\sin(2x - 3\pi) = -\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$.

Uitwerking

$-\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin(\frac{1}{2}\pi - (x + \frac{1}{2}\pi)) = -\sin(-x) = \sin(x)$, dus op te lossen is de vergelijking $\sin(2x - 3\pi) = \sin(x)$. Dit geeft $2x - 3\pi = x + k \cdot 2\pi$ of $2x - 3\pi = \pi - x + k \cdot 2\pi$. Dan volgt $x = 3\pi + k \cdot 2\pi$ ofwel $x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = 4\pi + k \cdot 2\pi$ ofwel $x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.

16 Los algebraïsch op: $2\cos(\frac{1}{2}\pi - 2x) = -3\sin(\frac{3}{2}\pi + 2x)$.

Uitwerking

$-3\sin(\frac{3}{2}\pi + 2x) = 3\sin(\pi + (\frac{3}{2}\pi + 2x)) = 3\sin(\frac{5}{2}\pi + 2x) = 3\sin(\frac{1}{2}\pi + 2x)$ en $3\sin(\frac{1}{2}\pi + 2x) = 3\sin(\pi - (\frac{1}{2}\pi + 2x)) = 3\sin(\frac{1}{2}\pi - 2x)$. Dus de gegeven vergelijking is te schrijven als $2\cos(\frac{1}{2}\pi - 2x) = -3\sin(\frac{3}{2}\pi + 2x) = 3\sin(\frac{1}{2}\pi - 2x)$ ofwel

$$2\cos(\frac{1}{2}\pi - 2x) = 3\sin(\frac{1}{2}\pi - 2x) \Leftrightarrow \frac{2\cos(\frac{1}{2}\pi - 2x)}{2\cos(\frac{1}{2}\pi - 2x)} = \frac{3\sin(\frac{1}{2}\pi - 2x)}{2\cos(\frac{1}{2}\pi - 2x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{3}{2}\tan(\frac{1}{2}\pi - 2x) \Leftrightarrow \tan(\frac{1}{2}\pi - 2x) = \frac{2}{3}$$

Hieruit volgt $\frac{1}{2}\pi - 2x \approx 0,588 + k \cdot \pi$ dus $x \approx 0,491 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (of nauwkeuriger).

Subdomein E1 Meetkundige vaardigheden

Specificatie	Vraag in pilotexamen	Vraag in syllabus
1	2012-I-6, 2012-II-10, 2013-I-11, 2013-I-12, 2013-I-16, 2013-II-16	
2	2012-I-6, 2012-I-13, 2012-II-10, 2013-I-6, 2013-II-17	
3	2012-I-7, 2013-I-6	
4	2012-I-7, 2012-II-11	
5		
6		
7	2012-II-10	
8		17

Relatie met subdomein A3

2013-I-6: in vergelijking met regulier is de aanwijzing over gelijkvormigheid niet gegeven.

17 In een assenstelsel snijdt m de x -as in punt $A(a, 0)$ en de y -as in punt $B(0, b)$.

Hierbij is $a > 0$ en $b > 0$.

a. Laat zien dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ een vergelijking van m is.

Het punt $O(0,0)$ wordt gespiegeld in de lijn m . Het spiegelbeeld van O is het punt P . De oppervlakte van vierhoek $OAPB$ is gelijk aan ab . De oppervlakte van de

rechthoek waarvan de zijden evenwijdig met de diagonalen van vierhoek $OAPB$ zijn is derhalve $2ab$. Dit is meetkundig te bewijzen. In vraag b wordt gevraagd dit *algebraïsch* te bewijzen.

b. Bewijs algebraïsch dat dit inderdaad zo is: $OP \cdot AB = 2ab$.

Uitwerking

a. Vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ is de vergelijking van een lijn. Door substitutie blijkt dat de punten A en B op deze lijn liggen. Aangezien door twee punten precies één lijn gaat is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ de vergelijking van de lijn door A en B .

b. Aanpak: eerst de coördinaten van P bepalen door de lijn l te nemen door O die loodrecht op AB staat, de coördinaten van het snijpunt S van l met AB te berekenen. De coördinaten van P zijn dan twee keer zo groot als die van S ; vervolgens de lengte van OP en van AB berekenen (met de stelling van Pythagoras) en die twee lengten met elkaar vermenigvuldigen.

De richtingscoëfficiënt van AB is $-\frac{b}{a}$. Een vergelijking van l is dan $y = \frac{a}{b}x$. Door

het stelsel $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ y = \frac{a}{b}x \end{cases}$ op te lossen, worden de coördinaten van S gevonden:

$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$. De coördinaten van P zijn dus $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$. De lengte van

OP is dan $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. De lengte van AB is $\sqrt{a^2+b^2}$. Hieruit volgt het

gevraagde: $OP \cdot AB = 2ab$.

Subdomein E2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde

Specificatie	Vraag in pilotexamen
1	2012-I-6, 2012-II-3, 2012-II-16
2	2012-II-14
3	2012-I-6, 2012-II-16
4	2012-I-7, 2013-II-16
5	2013-I-15
6	
7	2012-I-7, 2012-II-15, 2012-II-16
8	
9	
10	
11	2013-II-17
12	2013-I-15
13	2012-I-7, 2012-II-16

Subdomein E3 Vectoren en inproduct

Specificatie	Vraag in pilotexamen
1	2013-I-6
2	2013-II-9
3	
4	2012-II-14, 2013-II-10
5	
6	2012-I-11, 2012-II-3
7	2012-I-11, 2012-II-4, 2013-II-11
8	2012-I-11
9	2013-1-17

Bijlage 1 Examenprogramma

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

- Domein A Vaardigheden
- Domein B Formules, functies en grafieken
- Domein C Differentiaal- en integraalrekening
- Domein D Goniometrische functies
- Domein E Meetkunde met coördinaten
- Domein F Keuzeonderwerpen

Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C, D en E in combinatie met de vaardigheden uit domein A.

Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

Het CvE maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en:

- subdomein E1;
- domein F;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

1. De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

2. De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar het oorspronkelijke probleem terugvertalen.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

3. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige denkactiviteiten – waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

Domein B: Functies, grafieken en vergelijkingen

Subdomein B1: Formules en functies

4. De kandidaat kan formules interpreteren en bewerken, bij een verband tussen twee variabelen een grafiek tekenen in een assenstelsel en bepalen of een gegeven formule herschreven kan worden als functievoorschrift.

Subdomein B2: Standaardfuncties

5. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van de volgende standaardfuncties: machtsfuncties met rationale exponenten, exponentiële functies, logaritmische functies, goniometrische functies en de absolute-waardefunctie en kan van deze verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen en gebruiken.

Subdomein B3: Functies en grafieken

6. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, combineren, de bijbehorende grafieken tekenen en aan de hand van een functievoorschrift zonder hulpmiddelen kwalitatieve uitspraken doen over de functie en haar grafiek.

Subdomein B4: Inverse functies

7. De kandidaat kan de inverse van een functie begripsmatig hanteren, opstellen en gebruiken.

Subdomein B5: Vergelijkingen en ongelijkheden

8. De kandidaat kan vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen en de oplossingen interpreteren.

Subdomein B6: Asymptoten en limietgedrag van functies

9. De kandidaat kan het asymptotisch gedrag van functies bepalen en dit met limietberekening aantonen.

Domein C: Differentiaal- en integraalrekening

Subdomein C1: Afgeleide functies

10. De kandidaat kan de eerste en tweede afgeleide van een functie begripsmatig interpreteren en gebruiken om die functie te onderzoeken en de eerste en tweede afgeleide gebruiken in toepassingen.

Subdomein C2: Technieken voor differentiëren

11. De kandidaat kan de eerste en tweede afgeleide van functies bepalen met behulp van de regels voor het differentiëren en daarbij algebraïsche technieken gebruiken.

Subdomein C3: Integraalrekening

12. De kandidaat kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen.

Domein D: Goniometrische functies

13. De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen oplossen en hierbij de periodiciteit met inzicht gebruiken.

Domein E: Meetkunde met coördinaten

Subdomein E1: Meetkundige vaardigheden

14. De kandidaat kan meetkundige eigenschappen van objecten onderzoeken en bewijzen en kan daarbij gebruik maken van meetkundige en algebraïsche technieken en van ICT.

Subdomein E2: Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde

15. De kandidaat kan eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere geschikte figuren onderzoeken met behulp van algebraïsche voorstellingen, kan in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en kan algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen.

Subdomein E3: Vectoren en inproduct

16. De kandidaat kan met behulp van vectoren en inproducten eigenschappen van figuren in het vlak afleiden en berekeningen uitvoeren.

Subdomein E4: Toepassingen

17. De kandidaat kan de aangegeven technieken toepassen in geschikte natuurwetenschappelijke en technische situaties.

Domein F: Keuzeonderwerpen

Bijlage 2 Examenwerkwoorden

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

De kruisjes in de tabel geven aan bij welke wiskundevakken van havo en vwo het woord in het centraal examen de aangegeven betekenis heeft. Als er geen kruisje staat, kan het woord wel in het betreffende examen worden gebruikt, maar wordt ter plekke aangegeven hoe het verstaan moet worden.

Deze lijst met examen(werk)woorden is niet uitputtend.

	woord	toelichting	havo		vwo		
			A	B	C	A	B
1	aantonen	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.	x	x	x	x	x
2	afleiden (van een formule)	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van een formule blijkt. In het algemeen geldt dat de formule controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.	x	x	x	x	x
3	aflezen	Het antwoord is voldoende.	x	x	x	x	x
4	algebraïsch	Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.		x			x
5	bepalen	De wijze waarop het antwoord gevonden wordt is vrij; een toelichting is vereist.	x	x	x	x	x
6	berekenen	De wijze van berekenen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van berekenen.	x	x	x	x	x
7	beredeneren	Een redenering waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.	x	x	x	x	x
8	bewijzen	Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.		x			x
9	exact	Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; de antwoorden mogen niet benaderd worden.		x			x
10	herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven in een gelijkwaardige vorm.	x	x	x	x	x
11	onderzoeken	De aanpak is vrij, een toelichting is vereist. De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van onderzoeken.	x	x	x	x	x

	woord	toelichting	havo		vwo		
			A	B	C	A	B
12	oplossen	De wijze van oplossen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van oplossen.	x	x x	x	x	x x
13	schatten	De wijze van schatten is vrij; een toelichting is vereist.	x	x	x	x	x
14	schetsen van een grafiek	Een schets van een grafiek moet voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten.	x	x	x	x	x
15	tekenen van een grafiek	Een tekening van een grafiek moet, naast een assenstelsel met een schaalverdeling, de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten. De tekening van de grafiek moet nauwkeurig zijn.	x	x	x	x	x

Bijlage 3 Begrippenlijst

De in deze lijst opgenomen begrippen worden bij de kandidaten van het betreffende centraal examen wiskunde bekend verondersteld. Zij kunnen zonder nadere toelichting in examenvragen worden gebruikt.

In deze lijst zijn die wiskundige begrippen opgenoemd die vermeld zijn onder de parate kennis bij de specificaties of voortvloeien uit de parate en productieve vaardigheden. Deze lijst met begrippen is niet uitputtend. Zo zijn begrippen die als voorkennis worden beschouwd, niet opgenomen.

Bij de *standaardfuncties* moet de kandidaat de *karakteristieke* eigenschappen kennen. Bij wiskunde A havo en wiskunde C vwo wordt in het examen niet over 'functies' maar over 'verbanden' gesproken, de functienotaties $x \rightarrow \dots$ of $f(x) = \dots$ worden hier ook niet gebruikt.

In onderstaande tabel dient voor wiskunde A havo en wiskunde C vwo dan ook overal voor 'functies' 'verbanden' te worden gelezen.

Functies/verbanden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	variabele	x	x	x	x	x
	grootte, eenheid		x			x
	absoluut, relatief	x		x		
	karakteristieke eigenschappen van een functie		x			x
	domein		x			x
	bereik		x			x
	nulpunt		x			x
	extreem, extreme waarde		x		x	x
	maximum(waarde)	x	x	x	x	x
	minimum(waarde)	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) stijgen	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) dalen	x	x	x	x	x
	karakteristieke eigenschappen van een grafiek		x			x
	snijpunt(en) met x - en y -as	x	x	x	x	x
	top		x	x	x	x
	buigpunt					x
	symmetrie		x			x
	asymptotisch gedrag		x	x ¹	x ¹	x
	verticale en horizontale asymptoot		x			x ²
	scheve asymptoot					x ²
	standaardfuncties	x	x		x	x
	lineaire (of eerstegraads) functies	x	x	x	x	x
	richtingscoëfficiënt	x	x	x	x	x
	kwadratische (of tweedegraads) functies		x	x	x	x
	parabool		x			x

¹ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

² Deze begrippen ook in relatie met limieten

	havo		vwo		
	wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
machtsfuncties		x	x	x	x
wortelfuncties		x			x
exponentiële functies	x	x	x	x	x
grondtal	x	x		x	x
exponent	x	x	x	x	x
beginwaarde	x	x	x	x	x
groefactor	x	x	x	x	x
groeipercentage	x	x	x	x	x
halveringstijd	x	x	x	x	x
verdubbelingstijd	x	x	x	x	x
logaritmische functies		x	x	x	x
logaritme		x	x	x	x
natuurlijke logaritme				x	x
logaritmische schaalverdeling	x	x	x	x	x
goniometrische functies		x		x^3	x
sinusoïde		x			x
radiaal		x			x
periodiek verschijnsel		x	x		x
periode		x	x	x	x
frequentie					x
trillingstijd					x
amplitude		x	x	x	x
evenwichtsstand		x		x	x
evenwichtswaarde			x		
sinusmodel					x
harmonische trilling					x
som-, verschil en verdubbelingsformules					x
gebroken lineaire functies		x			x
hyperbool		x			x
absolute-waarde-functies					x
vergelijkingen en ongelijkheden	x	x	x	x	x
lineaire of eerstegraadsvergelijking	x	x	x	x	x
kwadratische of tweedegraadsvergelijking		x			x
abc-formule		x			x
(lineair) interpoleren en extrapoleren	x		x	x	
trend			x		
somfunctie		x	x^4	x^4	x
verschilfunctie		x	x^4	x^4	x
productfunctie			x^4	x^4	x
quotiëntfunctie			x^4	x^4	x

³ Alleen de sinusfunctie

⁴ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

	havo		vwo		
	wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
		x	x^5	x^5	x
samengestelde functie, ketting van functies		x			
inverse functie		x^5			x
transformaties		x			x
translatie		x			x
verschuiving				x	
vermenigvuldiging t.o.v. x-as of y-as		x			x
herschalen				x	
evenredigheidsverbanden	x	x	x	x	x
recht evenredig, evenredig	x	x	x	x	x
omgekeerd evenredig	x	x	x	x	x
evenredig met een macht		x			x
evenredigheidsconstante		x			x
limieten					x
linker- en rechterlimiet					x
perforatie					x
parameter		x			x
Meetkunde					
aanzicht			x		
perspectieftekening			x		
éénpuntperspectief			x		
tweepuntperspectief			x		
horizon			x		
verdwijnpunt			x		
oogpunt			x		
vergrotingsfactor			x		
afstand		x	x		x
omgeschreven cirkel					x
regelmatige veelhoek			x		
stelling van Pythagoras		x	x		x
gelijkvormigheid		x	x		x
symmetrie			x		
gulden snede			x		
goniometrische verhoudingen		x			x
sinusregel en cosinusregel		x			x
vergelijking van een lijn	x	x		x	x
vergelijking van een cirkel		x			x
stelsel vergelijkingen		x			x
strijdig stelsel					x
afhankelijk stelsel					x
parametervoorstelling van een lijn					x
parametervoorstelling van een cirkel					x
vector					x
lengte, richtingshoek, kentallen, componenten van een vector					x

⁵ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	inproduct van twee vectoren					x
	vectorvoorstelling van een lijn, steunvector, richtingsvector					x
	zwaartepunt					x
Veranderingen	interval		x	x	x	x
	intervalnotaties		x			x
	de Δ -notatie voor een differentie		x			x
	differentiequotiënt		x		x	x
	gemiddelde verandering			x	x	
	toenamediaagram		x		x	x
	helling		x	x	x	x
	steilheid		x			x
	hellinggrafiek				x	
	rijen, inclusief notaties			x	x	
	rekenkundige rij				x	
	meetkundige rij				x	
	somrij				x	
	Σ -teken				x	
	directe formule			x	x	
	recursieve formule			x	x	
Differentiaal- en integraalrekening	afgeleide (functie), inclusief notaties		x		x	x
	tweede afgeleide, inclusief notaties					x
	somregel en verschilregel		x		x	x
	productregel				x	x
	quotiëntregel				x	x
	kettingregel		x		x	x
	raaklijn		x		x	x
	integraal, integrand, primitieve					x
	omwentelingslichaam					x
	baansnelheid, baanversnelling					x
Statistiek	betrouwbaarheid, betrouwbaarheidsinterval	x				
	centrummaat, centrum	x				
	gemiddelde	x				
	mediaan	x				
	modus, modaal	x				
	data	x				
	discreet	x				
	continu	x				
	kwantitatief	x				
	kwalitatief	x				
	nominaal	x				
	ordinaal	x				
	absoluut	x				
	relatief	x				

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	frequentie	x				
	groepen	x				
	kenmerk	x				
	klasse, klassenindeling	x				
	verdeling	x				
	klokvormig	x				
	meertoppig	x				
	uniform	x				
	scheef	x				
	staart	x				
	uitschieter	x				
	normale verdeling	x				
	de drie vuistregels van de normale verdeling	x				
	populatie	x				
	populatiegemiddelde	x				
	populatieproportie	x				
	representatie / presentatie	x				
	dotplot	x				
	staafdiagram	x				
	cirkeldiagram	x				
	steelbladdiagram	x				
	lijndiagram	x				
	(cumulatief / relatief) frequentiepolygoon	x				
	boxplot	x				
	(cumulatieve) frequentietabel	x				
	kruistabel	x				
	puntenwolk, spreidingsdiagram	x				
	spreidingsmaat, spreiding	x				
	interkwartielafstand	x				
	standaardafwijking	x				
	spreidingsbreedte	x				
	steekproef	x				
	aselect	x				
	representatief	x				
	steekproefomvang	x				
	steekproevenverdeling	x				
	steekproefgemiddelde	x				
	steekproefproportie	x				
Combinatoriek	boomdiagram			x	x	
	wegendiagram			x	x	
	rooster			x	x	
	permutaties			x	x	
	combinaties			x	x	
	driehoek van Pascal			x		
Logisch redeneren	Venn-diagram			x		

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	nodige, voldoende voorwaarde			x		
	contradictie			x		
	paradox			x		
	als-dan-redenering			x		
	hier-uit-volgt-conclusie			x		
	tegenvoorbeeld			x		

Bijlage 4 Algebraïsche vaardigheden

In deze bijlage worden de eisen wat betreft algebraïsche vaardigheden beschreven voor alle wiskundevakken met een centraal examen. Algebraïsche vaardigheden zijn geen doel op zichzelf, maar onderdeel van wiskundige activiteiten. De algebraïsche vaardigheden moeten in samenhang met het betreffende programma worden gelezen. Door algebraïsche expressies te bewerken kan bijvoorbeeld de juistheid van beweringen worden aangetoond, het rekenwerk vaak worden vereenvoudigd of vergelijkingen zo herschreven worden dat ze exact zijn op te lossen. Deze algebraïsche vaardigheden zijn onderverdeeld in specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.

Bij *specifieke* algebraïsche vaardigheden gaat het om parate kennis en het vlot kunnen toepassen van de bijbehorende vaardigheden op de voorkomende algebraïsche expressies. Deze vaardigheden hebben betrekking op algoritmisch werken en algebraïsch rekenen. Het gaat hier bijvoorbeeld om kennis en gebruik van rekenregels, inclusief het werken met haakjes, bij het invullen van getallen of variabelen in een expressie en het gebruik van algoritmen om een vergelijking op te lossen.

Bij *algemene* algebraïsche vaardigheden spelen aspecten als aanpak, globale strategie, het herkennen van structuren en methoden, en doelgerichtheid een rol. De kandidaten moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, moeten kwalitatief kunnen redeneren aan de hand van een formule (zoals stijgen/dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag), moeten een formule kunnen opstellen door het generaliseren van getallenvoorbeelden of het combineren van bekende formules, moeten verbanden zien tussen de verschillende representaties van een functie en moeten kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en betekenis toekennen aan de variabelen en parameters.

Samenvattend zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de kandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de kandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen.

Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) reeds bekend verondersteld mag worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.

Op de plaats van A , B , C en D in de volgende tabellen kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $ax+b$, $\frac{a}{x}$ en x^2 .

Niet aan de orde komen de regels die horen bij het differentiëren.

De vaardigheden genoemd bij categorieën A t/m D moeten in beide richtingen kunnen worden uitgevoerd, tenzij anders is vermeld. Beperkende voorwaarden zoals bijvoorbeeld noemers van breuken zijn ongelijk 0, worden niet vermeld.

Hoewel bij het samenstellen van de kruisjeslijst met de algebraïsche vaardigheden de grootst mogelijke nauwkeurigheid is nagestreefd, kan niet gegarandeerd worden dat deze volledig is.

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
A. Breukvormen	1. $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{A}{B} + C = \frac{A + BC}{B}$	x	x	x	x	x
	3. $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{A}{\frac{B}{C}} = \frac{A \cdot C}{B}$	x	x	x	x	x
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$	x	x	x	x	x
	2. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	x	x	x	x	x
C. Bijzondere producten	1. haakjes wegwerken en ontbinden in factoren: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	2. $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	3. $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$		x			x
	4. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$		x			x
	5. kwadraat afsplitsen: $x^2 + px + q$ schrijven in de vorm $(x+r)^2 + s$		x			x

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
D. Machten en logaritmen	1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	x	x	x	x	x
	3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	x	x	x	x	x
	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	x	x	x	x	x
	6. $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ met p positief en geheel		x	x	x	x
	7. ${}^s \log(a) + {}^s \log(b) = {}^s \log(a \cdot b)$		x		x	x
	8. ${}^s \log(a) - {}^s \log(b) = {}^s \log\left(\frac{a}{b}\right)$		x		x	x
	9. ${}^s \log(a^p) = p \cdot {}^s \log(a)$		x		x	x
	10. ${}^s \log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$		x	x	x	x
	vwo C: alleen $p=10$					
11. ${}^s \log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$				x	x	
E. Goniometrie	voor formules zie betreffende domein		x			x
F. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A tot en met D	1. via substitutie van getallen	x	x	x	x	x
	2. via substitutie van expressies	x	x	x	x	x
	3. via het omwerken van formules	x	x	x	x	x
G. Vergelijkingen oplossen met behelp van algemene vormen en formules herleiden (voor wiA en wiC worden deze vaardigheden uitsluitend gebruikt voor het herleiden van formules)	1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = 0$		x	x		x
	2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = C$ havo A, vwo A en vwo C: $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \Rightarrow B = C$	x	x	x	x	x
	3. $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \text{ of } A = -B$			x	x	x
	6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$	x	x	x	x	x

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
H. Algoritmen t.b.v. het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules (voor wiA en wiC worden deze vaardigheden uitsluitend gebruikt voor het herleiden van formules)	1. eerstegraadsvergelijkingen $ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c-b}{a}$	x	x	x	x	x
	2. tweedegraadsvergelijkingen abc-formule $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		x			x
	3. $x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$ als n oneven is $x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$ of $x = -c^{\frac{1}{n}}$ als n even is		x	x	x	x
	4. $g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log(a)$		x	x	x	x
	5. $e^x = a \Rightarrow x = \ln(a)$				x	x
	6. ${}^g\log(x) = b \Rightarrow x = g^b$		x	x	x	x
	7. $\ln(x) = b \Rightarrow x = e^b$				x	x
	8. $ x = c \Rightarrow x = c$ of $x = -c$					x
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties	1. $f(A) = c$		x			x
	2. $f(A) = f(B)$		x			x
J. Vergelijkingen en ongelijkheden van het type $f(x) = g(x)$ resp. $f(x) \geq g(x)$ oplossen	1. grafisch, waaronder ICT	x	x	x	x	x
	2. vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch dan wel exact, indien algebraïsch/exact oplosbaar		x			x

Algemene vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
K. Formules opstellen	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfuncties					
	a. eerstegraads/lineaire functie	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfunctie		x		x	x
	c. exponentiële functie	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functie		x		x	x
	e. goniometrische functie		x		x ⁶	x
	f. machtsfunctie		x		x	x
	g. absolute waarde functie					x
	3. door generaliseren via getallenvoorbeelden	x	x	x	x	x
	4. door schakelen van formules	x	x	x	x	x
L. Expressies herkennen	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	a. eerstegraads/lineaire functies	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfuncties		x	x	x	x
	c. exponentiële functies	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functies		x	x	x	x
	e. goniometrische functies		x		x	x
	f. machtsfuncties		x	x	x	x
2. structuur van een expressie vaststellen	x	x	x	x	x	
3. rol van een voorkomende parameter bepalen	x	x		x	x	
M. Karakteristieken bepalen	kwalitatief redeneren over expressies of delen daarvan met betrekking tot karakteristieken als					
	a. uiterste waarden	x	x	x	x	x
	b. stijgen of dalen	x	x	x	x	x
	c. asymptotisch gedrag	x	x	x	x	x
N. Algebraïsche expressies reduceren en representeren	1. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan	x	x	x	x	x
	2. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren		x			x
	3. flexibel verschillende representaties van functies (formule, tabel, grafiek) kunnen inzetten en tussen deze representaties kunnen wisselen	x	x	x	x	x

⁶ alleen de sinusfunctie

Bijlage 5 Lijst van formules die in het examen wordt opgenomen

De volgende lijst formules wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen.

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

