

Examen HAVO

2013

tijdvak 1
vrijdag 17 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

De huisarts

Huisartsen nemen een centrale positie in binnen de gezondheidszorg. De huisarts is namelijk het eerste aanspreekpunt voor mensen met vragen over gezondheid en ziekte. Veel mensen hebben dan ook regelmatig contact met hun huisarts, bijvoorbeeld door naar het spreekuur te gaan of een telefonisch consult te hebben. Deze contacten worden contactmomenten genoemd. Volgens een medisch tijdschrift hadden in 2008 mannelijke patiënten gemiddeld 3,5 en vrouwelijke patiënten gemiddeld 4,7 contactmomenten met hun eigen huisarts.



Neem aan dat deze gegevens ook gelden voor huisarts Tineke Hoekstra. Zij heeft in 2008 een huisartsenpraktijk met 912 mannelijke patiënten en dat is 52% van haar totale aantal patiënten.

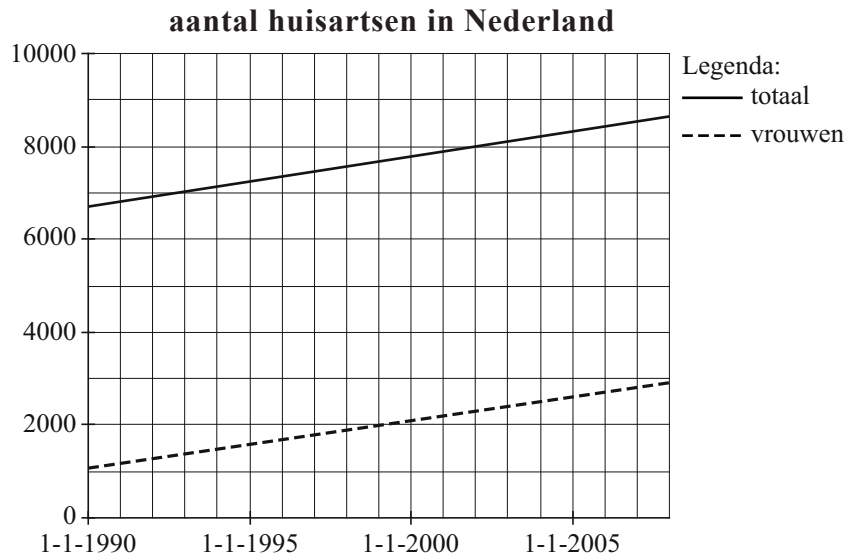
- 4p **1** Bereken voor Tineke in 2008 het totale aantal contactmomenten met al haar patiënten.

Niet elke patiënt van Tineke heeft jaarlijks contact met haar. Van haar mannelijke patiënten had 30% in 2008 geen enkel contactmoment met haar. Dat betekent dat er met de mannelijke patiënten die wel contact met haar hadden, gemiddeld meer dan 3,5 contactmomenten waren.

- 3p **2** Bereken voor de mannelijke patiënten die wel contact met haar hadden, hoeveel contactmomenten zij in 2008 gemiddeld hadden.

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar tegenwoordig zijn er heel wat vrouwelijke huisartsen en dat aantal neemt nog steeds toe, zie de figuur. We nemen aan dat de stijging lineair verloopt.

figuur



Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als

$$H_V = a \cdot t + 1078$$

De waarde van a is ongeveer 106.

- 3p **3** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van a in één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule

$$H_T = 107 \cdot t + 6703, \text{ met } t \text{ in jaren en } t = 0 \text{ op 1 januari 1990.}$$

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

- 5p **4** Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

Eerlijk spel?

Peter en Quinten spelen een dobbelspel. Er wordt gegooid met twee zuivere dobbelstenen, waarbij het niet uitmaakt of Peter of Quinten gooit. Peter krijgt een punt als met beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen (dubbel) wordt gegooid. In alle andere gevallen (niet-dubbel) krijgt Quinten een punt.



- 3p 5 Toon aan dat de kans dat Quinten een punt krijgt $\frac{5}{6}$ is.

Degene die het eerst een vooraf afgesproken aantal punten heeft, wint het spel. Het is wel duidelijk dat er geen sprake is van eerlijk spel: Quinten heeft vijfmaal zoveel kans op een punt als Peter. Daarom spreken ze af dat Quinten één punt krijgt als er niet-dubbel wordt gegooid, maar dat Peter vijf punten krijgt als er dubbel wordt gegooid.

Neem aan dat Peter en Quinten hebben afgesproken dat degene die het eerst vijf punten heeft, het spel wint.

- 3p 6 Toon aan dat de kans dat Quinten dan het spel wint kleiner is dan 0,5.

Peter en Quinten hebben niet in de gaten dat Quinten minder kans heeft het spel te winnen. Ze houden de puntentelling zoals afgesproken, dus bij dubbel krijgt Peter vijf punten en bij niet-dubbel krijgt Quinten één punt. Wanneer ze afspreken dat degene die het eerst vijf punten heeft het spel wint, kan het gebeuren dat het spel al na één keer gooien beslist is. Als er dubbel gegooid wordt, krijgt Peter vijf punten en is hij de winnaar. Maar het kan ook gebeuren dat er meerdere malen gegooid moet worden totdat er een winnaar is. Je kunt berekenen hoeveel keer er gemiddeld gegooid moet worden totdat er een winnaar is. Hierbij wordt gebruikgemaakt van onderstaande tabel.

Deze tabel staat ook op de uitwerkbijlage.

tabel

benodigd aantal keren gooien	1	2	3	4	5
kans					

- 5p 7 Vul de tabel op de uitwerkbijlage in en bereken hiermee de verwachtingswaarde van het aantal worpen dat nodig is totdat er een winnaar is. Rond het antwoord af op één decimaal.

Peter en Quinten besluiten het spel te spelen totdat één van hen 10 punten heeft.

Voorbeelden van een spelverloop waarbij Peter wint, zijn Q-P-Q-Q-Q-Q-Q-P en P-Q-Q-Q-P.

Een voorbeeld van een spelverloop waarbij Quinten wint, is Q-Q-Q-Q-P-Q-Q-Q-Q-Q-Q.

4p 8 Bereken hoeveel verschillende spelverlopen er zijn waarbij Quinten wint.

Ontslagvergoeding

Bij grote bedrijven wordt er regelmatig gereorganiseerd. Hierbij vallen soms gedwongen ontslagen. Een ontslagen werknemer krijgt dan vaak eenmalig een ontslagvergoeding.

Er zijn verschillende rekenmethodes om deze vergoeding te bepalen. In deze opgave bekijken we er twee.

De eerste rekenmethode gebruikt de formule

$$V_1 = 0,5 \cdot m \cdot g$$

Hierin is V_1 de ontslagvergoeding in euro's, m het bruto maandsalaris in euro's en g het aantal gewogen dienstjaren. De dienstjaren vóóordat iemand 40 jaar is, tellen elk voor 1, de volgende tien dienstjaren tellen elk voor 1,5 en elk dienstjaar vanaf het moment dat iemand 50 jaar is geworden, telt voor 2.

Bob Jansen is onlangs 52 jaar geworden. Hij werkt vanaf zijn dertigste verjaardag bij zijn huidige werkgever. Deze werkgever gaat reorganiseren met als gevolg dat Bob ontslagen wordt.

Bob had een bruto maandsalaris van 4300 euro.

- 3p **9** Toon aan dat Bob volgens de formule een ontslagvergoeding krijgt van meer dan 60 000 euro.

De tweede rekenmethode gebruikt de formule

$$V_2 = 6 \cdot m + 2,4 \cdot m \cdot d$$

Hierin is V_2 de ontslagvergoeding in euro's, m het bruto maandsalaris in euro's en d het aantal dienstjaren, geteld vanaf de 36e verjaardag.

Er geldt dat $d = 0$ totdat de werknemer 37 jaar wordt. Op de dag dat de werknemer 37 jaar wordt, wordt $d = 1$. Op de 38e verjaardag wordt $d = 2$, enzovoort. Het aantal dienstjaren wordt altijd in gehele jaren berekend.

Bij de tweede formule geldt een maximale ontslagvergoeding van 54 keer het bruto maandsalaris.

Henk Klaassen werkt vanaf zijn 36e verjaardag bij zijn huidige werkgever. Hij is bang bij een reorganisatie te worden ontslagen. Neem aan dat zijn maandsalaris door de jaren heen steeds gelijk blijft.

- 4p **10** Bereken na hoeveel dienstjaren hij voor het eerst zijn maximale ontslagvergoeding zou krijgen volgens de tweede formule.

Vakbonden hebben liever dat de formule voor V_2 gebruikt wordt dan de formule voor V_1 . Toch is de formule voor V_2 niet altijd gunstiger. Er zijn situaties waarbij de eerste formule gunstiger is voor een ontslagen werknemer.

- 4p 11 Geef een rekenvoorbeeld van zo'n situatie en geef daarbij aan op welke leeftijd de werknemer in dienst is getreden en op welke leeftijd hij ontslagen wordt.

Met de tweede formule kan de ontslagvergoeding V_2 worden berekend als het bruto maandsalaris m en het aantal dienstjaren d , geteld vanaf de 36e verjaardag, bekend zijn.

De formule kan worden herschreven tot een formule die uitgaat van het bruto jaarsalaris in plaats van het bruto maandsalaris. Een jaarsalaris is meer dan 12 maandsalarissen, omdat een werknemer ook vakantiegeld en een eindejaarsuitkering uitbetaald krijgt. Hierdoor geldt dat het bruto jaarsalaris j gelijk is aan 13,5 keer het bruto maandsalaris m .

De tweede formule is daarmee te schrijven in de vorm:

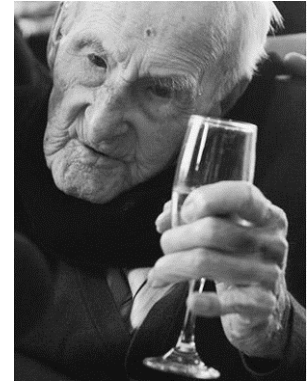
$$V_2 = \dots \cdot j + \dots \cdot j \cdot d$$

- 3p 12 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de getallen die op de puntjes moeten staan. Licht je werkwijze toe.

Centenarians

Hoe oud kun je worden? Veel mensen vinden het al bijzonder als iemand de leeftijd van 90 jaar bereikt. Toch zijn er zelfs mensen die 100 jaar of ouder worden.

In Engeland wordt iemand die de leeftijd van 100 jaar bereikt, aangeduid met de titel **centenarian**. De kans om centenarian te worden is echter niet erg groot, ook niet als je al 90 jaar bent. Van degenen die toch de leeftijd van 100 jaar bereiken, worden sommigen zelfs **supercentenarian**: zij bereiken de leeftijd van 110 jaar. Deze titel is echter voor zeer weinigen weggelegd.



Uit onderzoek zijn de volgende gegevens bekend:

De kans dat een 90-jarige man 95 jaar wordt, is 0,27.

De kans dat een 95-jarige man 100 jaar wordt, is 0,13.

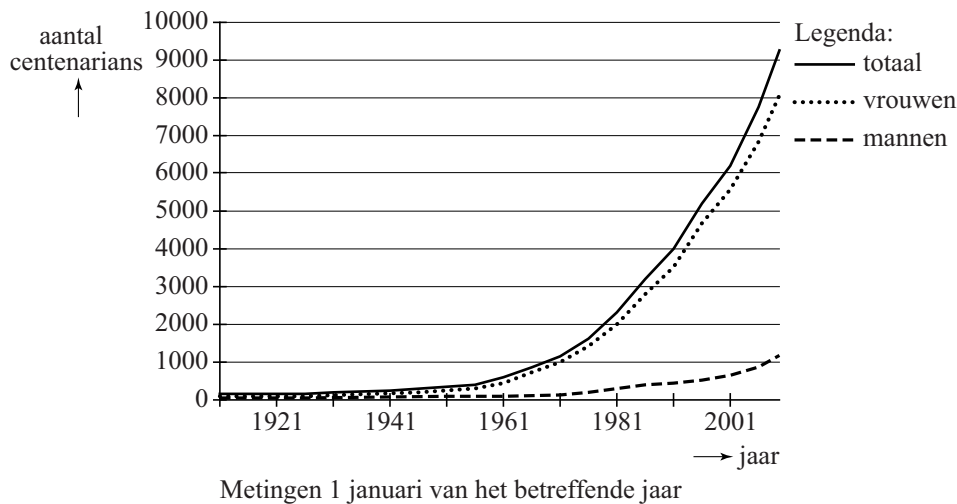
De kans dat een 100-jarige man 105 jaar wordt, is 0,11.

De kans dat een 105-jarige man 110 jaar wordt, is 0,09.

- 3p **13** Bereken de kans dat een 90-jarige man supercentenarian wordt.
- 4p **14** Bereken de kans dat een 100-jarige man geen supercentenarian wordt.

Het aantal centenarians in Engeland wordt vanaf 1911 nauwkeurig bijgehouden. In figuur 1 kun je zien hoe het aantal centenarians zich in de loop van de jaren heeft ontwikkeld.

figuur 1



Vanaf 1967 begon het totale aantal centenarians bij benadering exponentieel te groeien. Waren er op 1 januari 1967 zo'n 1000 centenarians, op 1 januari 2009 was dit aantal gestegen tot 9600.

4p **15** Bereken het groeipercentage per jaar in deze periode.

In figuur 1 is duidelijk te zien dat de groei van het aantal centenarians voornamelijk voor rekening van de vrouwen komt. Op 1 januari 2009 was $\frac{7}{8}$ deel van de 9600 centenarians vrouwelijk.

Voor de toekomst gaat men in Engeland uit van de volgende aannames:

- het aantal centenarians stijgt vanaf 1 januari 2009 met 8,0% per jaar;
- het aantal vrouwelijke centenarians blijft in de toekomst $\frac{7}{8}$ deel van het totaal.

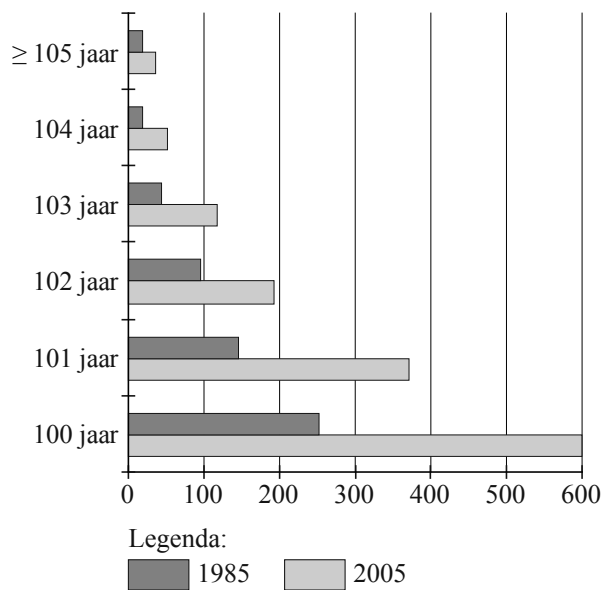
4p **16** Bereken het te verwachten aantal vrouwelijke centenarians op 1 januari 2034 in Engeland.

Ook in Nederland wordt het aantal personen van 100 jaar of ouder nauwkeurig bijgehouden. Deze personen worden ook wel **eeuwelingen** genoemd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek heeft het aantal eeuwelingen in 2005 vergeleken met het aantal eeuwelingen in 1985. Gegevens daarover vind je in de figuren 2 en 3.

In figuur 2 kun je bijvoorbeeld aflezen dat er op 1 januari 1985 ongeveer 45 personen waren van 103 jaar oud. In figuur 3 kun je aflezen dat er op dat moment op elke 100 vrouwelijke eeuwelingen ongeveer 38 mannen waren.

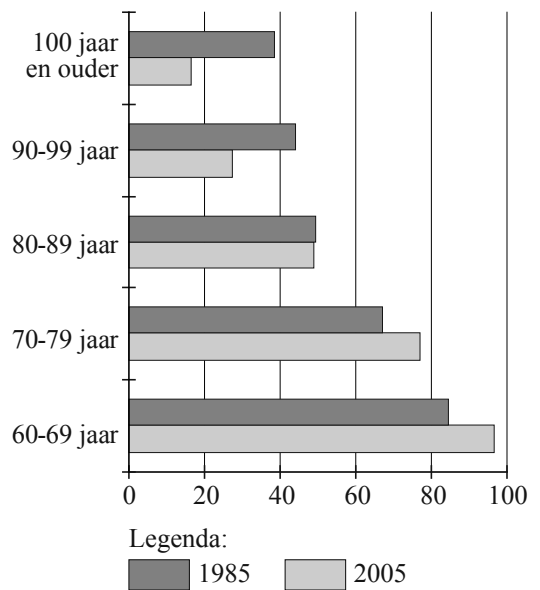
figuur 2

eeuwelingen naar leeftijd



figuur 3

aantal mannen per 100 vrouwen

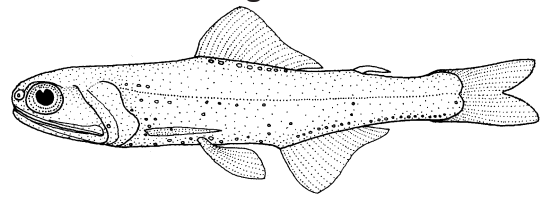


- 6p 17 Bereken met de gegevens van de figuren 2 en 3 hoeveel vrouwelijke eeuwelingen er op 1 januari 2005 in Nederland waren.

Lantaarnvisjes

In de oceanen leven tot een diepte van zo'n 100 meter lantaarnvisjes. Ze worden zo genoemd vanwege hun lichtuitstraling waarmee ze elkaar op grote diepte in het donker kunnen herkennen.

afbeelding



Bij een bepaalde soort lantaarnvisjes is de lengte van volwassen exemplaren bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,50 cm en een standaardafwijking van 0,45 cm.

- 3p **18** Bereken hoe lang een volwassen lantaarnvisje dat bij de 10% langste volwassen lantaarnvisjes van deze soort hoort, minimaal is.
- 4p **19** Bereken hoeveel procent van de volwassen lantaarnvisjes van deze soort een lengte heeft die minder dan 20% afwijkt van de gemiddelde lengte.

In de oceanen drijven veel plastics rond. In deze plastics zitten giftige stoffen die een bedreiging vormen voor het milieu omdat ze in de voedselketen terecht kunnen komen. De meeste plastics vergaan namelijk niet, maar vallen uiteen in ragfijne stukjes. Deze niet-afbreekbare stukjes plastic kunnen via het plankton in de maag van de lantaarnvisjes terechtkomen. Uit onderzoek is gebleken dat 35% van de lantaarnvisjes plastic in hun maag heeft.

Er worden 500 lantaarnvisjes gevangen.

- 4p **20** Bereken de kans dat minstens 170 van die lantaarnvisjes plastic in hun maag hebben.

Een verbod op plastic zakken zou niet alleen goed zijn voor de voedselketen, maar ook voor de CO₂-uitstoot.

In Ierland heeft men onderzocht wat het effect zou zijn op de CO₂-uitstoot als er in dat land geen plastic zakken meer zouden worden gemaakt. De conclusie: per jaar zou er 31 000 ton minder CO₂ worden uitgestoten. In Nederland wonen 4,4 keer zoveel mensen als in Ierland. Neem aan dat er in Nederland per persoon evenveel plastic zakken gemaakt worden als in Ierland.

Stel dat het aantal plastic zakken dat in Nederland gemaakt wordt, zou worden verminderd tot 35% van het oorspronkelijke aantal.

- 3p **21** Bereken hoeveel ton CO₂ er dan in Nederland per jaar minder zou worden uitgestoten.