

Examen HAVO

2013

tijdvak 2
woensdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Korting

In de handel is het gebruikelijk om korting te geven als een klant veel exemplaren van een bepaald product bestelt.

Kwantumkorting

Een manier om klanten korting te geven, is de kwantumkorting. Er wordt dan een procentuele korting gegeven op de kosten van de hele bestelling. Hierbij geldt: hoe meer exemplaren besteld worden, hoe hoger de korting. Een klant krijgt bij bedrijf A kwantumkorting op een product met een stukprijs (de prijs per exemplaar) van 7,50 euro. Het bedrijf geeft kwantumkorting volgens tabel 1.

tabel 1 **Bedrijf A: kwantumkorting**

| bestelling | korting op de kosten van de hele bestelling in % |
|---|---|
| tot en met 10 000 exemplaren | 0 |
| van 10 001 tot en met 20 000 exemplaren | 25 |
| van 20 001 tot en met 50 000 exemplaren | 50 |
| vanaf 50 001 exemplaren | 70 |

Bij kwantumkorting kun je soms beter iets meer exemplaren bestellen dan je nodig hebt, omdat je daarmee in totaal voordeliger uit bent.

3p 1 Geef hier met behulp van tabel 1 een voorbeeld van.

Staffelkorting

Een andere manier om klanten korting te geven is staffelen. Daarbij kan een klant ook korting krijgen, maar slechts over één of meer gedeelten van de bestelling. Voor de eerste exemplaren moet een klant de normale prijs per stuk betalen. Daarna wordt er per volgende hoeveelheid een steeds lagere prijs per stuk betaald.

Een klant krijgt bij een ander bedrijf, bedrijf B, op hetzelfde product staffelkorting volgens tabel 2. Hierin zie je dat de eerste 5000 exemplaren 7,50 euro per stuk kosten en dat de volgende 5000 exemplaren 5 euro per stuk kosten. Daarna neemt stapsgewijs de prijs per stuk nog verder af.

tabel 2 **Bedrijf B: staffelkorting**

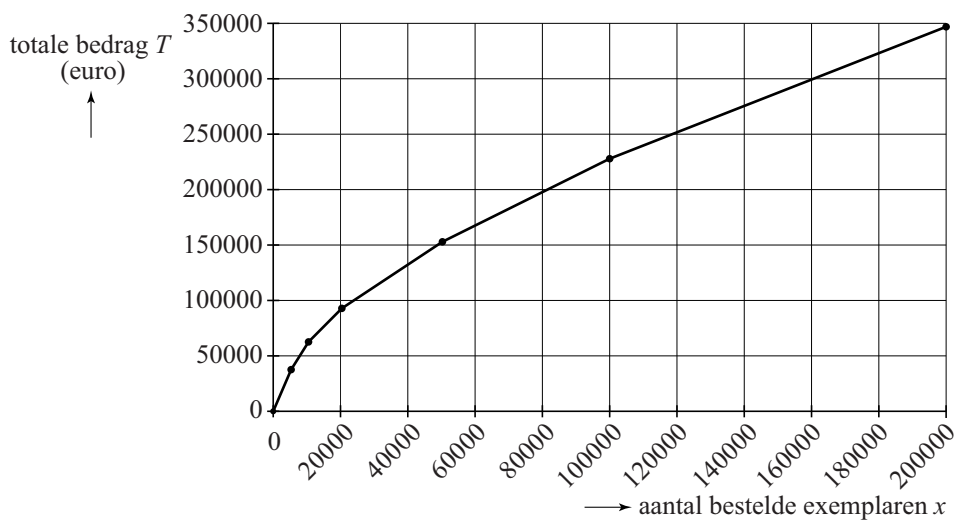
| | prijs per stuk in euro |
|--|---------------------------|
| De exemplaren 1 tot en met 5000 kosten per stuk | 7,50 |
| De exemplaren 5001 tot en met 10 000 kosten per stuk | 5,- |
| De exemplaren 10 001 tot en met 20 000 kosten per stuk | 3,- |
| De exemplaren 20 001 tot en met 50 000 kosten per stuk | 2,- |
| De exemplaren 50 001 tot en met 100 000 kosten per stuk | 1,50 |
| De exemplaren 100 001 tot en met 200 000 kosten per stuk | 1,20 |

Een klant wil een bestelling plaatsen van 45 000 exemplaren.

- 4p **2** Onderzoek welk van de bedrijven, A of B, voor deze klant het voordeligst is.

In het vervolg van deze opgave bekijken we de staffelkorting uitvoeriger. Het totale bedrag dat betaald moet worden volgens tabel 2 kan worden uitgezet in een grafiek. Deze grafiek bestaat uit zes verschillende lijnstukken. In de figuur is deze grafiek afgebeeld. In de grafiek is x het aantal bestelde exemplaren en T het totale bedrag in euro.

figuur



Bij de verschillende delen van de grafiek horen formules van de vorm $T = a \cdot x + b$.

- 4p **3** Stel met de gegevens van tabel 2 de formule op voor T bij een bestelling van 5001 tot en met 10 000 exemplaren.

De grafiek met de verschillende lijnstukken kan benaderd worden door een vloeiende kromme. Bij deze kromme hoort de formule:

$$T_{benaderd} = 260 \cdot x^{0,59}$$

Hierin is $T_{benaderd}$ het totale (benaderde) bedrag in euro en x het aantal bestelde exemplaren.

De prijs per stuk die betaald moet worden voor de exemplaren 10 001 tot en met 20 000 kan met behulp van het differentiequotiënt $\frac{\Delta T_{benaderd}}{\Delta x}$ op

het interval van 10 001 tot en met 20 000 benaderd worden.

- 5p **4** Bereken hoeveel de prijs per stuk volgens deze benadering afwijkt van de stukprijs zoals gegeven in tabel 2.

Bij elke bestelling kan met behulp van de formule van $T_{benaderd}$ de gemiddelde prijs per stuk berekend worden. Daarvoor moet het totale bedrag $T_{benaderd}$ gedeeld worden door het aantal bestelde exemplaren x .

Een klant wil zoveel exemplaren bestellen, dat de gemiddelde prijs per stuk 2,75 euro is.

- 4p **5** Onderzoek hoeveel exemplaren deze klant moet bestellen. Rond het antwoord af op duizendtallen.

Veiligheid in de luchtvaart

Hoewel er geregeld ernstige vliegtuigongelukken in de burgerluchtvaart gebeuren, is vliegen toch zeer veilig te noemen. Analyse van de gegevens laat zien dat er in de afgelopen veertig jaar maar weinig vliegtuigongelukken waren, variërend van 0 tot 10 per maand wereldwijd. Ook blijken de aantallen ongelukken per maand onafhankelijk van elkaar te zijn: het aantal vliegtuigongelukken in een bepaalde maand heeft geen enkele invloed op het aantal vliegtuigongelukken in de volgende maand. Het gemiddelde aantal vliegtuigongelukken per maand bleef door de jaren heen vrijwel gelijk.

Er bestaat een formule waarmee de kans P op n vliegtuigongelukken in een maand berekend kan worden:

$$P = \frac{m^n}{n!} \cdot 2,7183^{-m}$$

Hierin is m het gemiddelde aantal vliegtuigongelukken per maand.

Over de afgelopen veertig jaar is het gemiddelde aantal vliegtuigongelukken per maand 3,93. We gaan ervan uit dat dit gemiddelde in de nabije toekomst hetzelfde blijft.

Bovenstaande formule is met het gemiddelde $m = 3,93$ te schrijven als:

$$P = 0,0196 \cdot \frac{3,93^n}{n!}$$

- 3p **6** Laat zien hoe deze formule ontstaat uit de eerste formule.
- 4p **7** Bereken met behulp van de tweede formule de kans dat er in januari 2015 drie of vier vliegtuigongelukken zullen gebeuren.
- De kans op precies vijf vliegtuigongelukken in een bepaalde maand is ongeveer 0,15.
- 3p **8** Bereken hiermee de kans dat er in de eerste drie maanden van 2015 maandelijks precies vijf vliegtuigongelukken zullen gebeuren.
- De kans dat er in een bepaalde maand geen enkel vliegtuigongeluk zal gebeuren is vrij klein, namelijk ongeveer 0,02.
- 4p **9** Bereken de kans dat er in 2015 alleen in de maanden januari en februari geen enkel vliegtuigongeluk zal gebeuren, en in elk van de overige maanden wel minstens één vliegtuigongeluk.

Paracetamol

Paracetamol is een veelgebruikte pijnstillers, die in tabletvorm te koop is. Voor volwassenen zijn er tabletten die 500 mg paracetamol bevatten. Op de bijsluiter staat onder andere het volgende vermeld.

Dosering

Volwassenen: één of twee tabletten van 500 mg per keer, maximaal zes tabletten per 24 uur.

Aanwijzingen voor het gebruik

De tabletten moeten met een ruime hoeveelheid water ingenomen worden. Het toedieningsinterval moet minstens 4 uur bedragen.



Na het innemen van een tablet wordt de 500 mg paracetamol via maag en darmen bijna volledig in het bloed opgenomen. We gebruiken in deze opgave het volgende wiskundige model voor de opname van paracetamol in het bloed. Tien minuten na het innemen van een tablet is de helft van de paracetamol opgenomen in het bloed. De andere helft zit dan nog in maag en darmen. Van de achtergebleven paracetamol in maag en darmen wordt in de volgende tien minuten weer de helft opgenomen in het bloed. Ook daarna wordt iedere tien minuten de helft van de paracetamol die nog in maag en darmen zit, opgenomen in het bloed.

Een volwassene neemt om 9.00 uur één tablet van 500 mg in.

4p 10 Laat met een berekening zien dat na één uur ongeveer 492 mg paracetamol in het bloed is opgenomen.

De laatste 8 mg paracetamol in maag en darmen wordt niet in het bloed opgenomen. We gaan er verder in ons model van uit dat na ongeveer een uur de hoeveelheid paracetamol in het bloed door afbraak in de lever weer begint af te nemen.

Hierbij past de volgende formule:

$$P = 492 \cdot 0,84^{(t-1)}, \text{ met } t \geq 1$$

Hierin is P de hoeveelheid paracetamol in het bloed in mg en t de tijd in uren nadat de tablet is ingenomen.

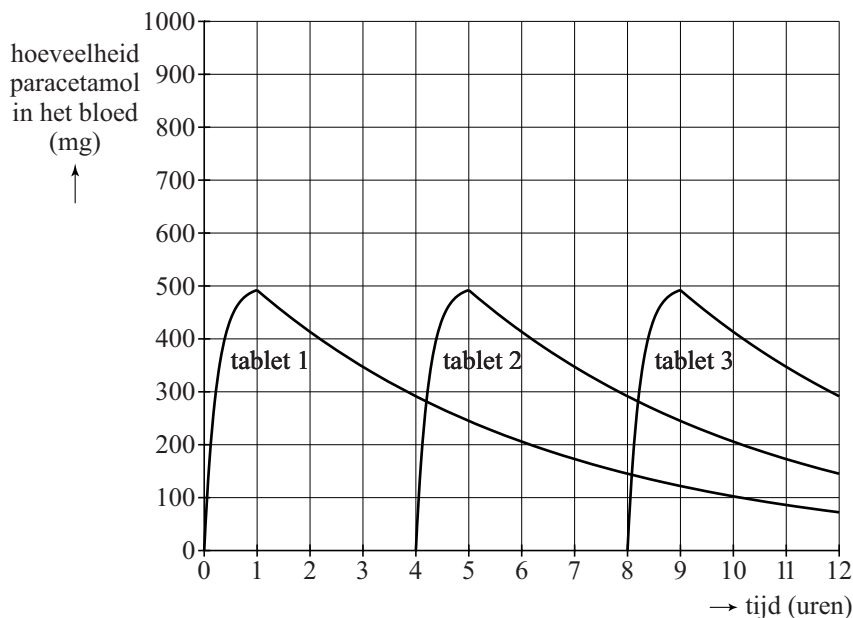
Het pijnstillend effect is merkbaar zolang de hoeveelheid paracetamol in het bloed meer is dan $200 \text{ mg}^{1)}$. Als de hoeveelheid paracetamol onder de 200 mg zakt, is het pijnstillend effect niet meer merkbaar: de tablet is uitgewerkt.

Een volwassene die om 9.00 uur een tablet heeft ingenomen, zal merken dat deze tablet in de loop van de middag is uitgewerkt.

- 4p 11 Bereken op welk moment de tablet is uitgewerkt. Geef je antwoord in uren en minuten nauwkeurig.

Een volwassene heeft veel last van pijn en neemt volgens het voorschrift elke vier uur een tablet in. In de figuur kun je voor een periode van 12 uur **per tablet** de hoeveelheid paracetamol aflezen die op een bepaald moment in het bloed opgenomen is. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



- 4p 12 Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van de **totale** hoeveelheid paracetamol in het bloed.

Bij flinke pijn mag een volwassene twee tabletten tegelijk innemen in plaats van één. Ook als er twee tabletten tegelijk ingenomen worden, geldt dat na ongeveer een uur de meeste paracetamol in het bloed opgenomen is. Het lichaam breekt de hoeveelheid paracetamol in het bloed wel wat langzamer af: iedere minuut wordt de hoeveelheid paracetamol in het bloed $0,2\%$ minder.

- 4p 13 Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid paracetamol in het bloed per uur afneemt.

noot 1 We gaan hierbij uit van een volwassene met gemiddelde lengte en gewicht.

Volgens de fabrikant is de hoeveelheid paracetamol in een tablet bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 mg en een standaardafwijking van 2,2 mg. Een apotheker controleert bij 25 tabletten of er in iedere tablet voldoende paracetamol zit. Een tablet die tussen 495 en 505 mg paracetamol bevat, keurt hij goed.

- 5p 14 Bereken de kans dat de apotheker alle tabletten goedkeurt, aangenomen dat de informatie van de fabrikant juist is.

Hog

Hog is een dobbelspelletje dat wordt gespeeld door twee spelers die om de beurt één keer gooien met zoveel dobbelstenen als ze maar willen. Dat aantal dobbelstenen mag elke beurt wisselen.

Eerst wordt er geloot wie er mag beginnen. De speler die aan de beurt is, gooit met de dobbelstenen. De score van deze beurt wordt berekend door de som van de ogen te bepalen. Maar pas op: als er met één of meer van de dobbelstenen een 1 is gegooid, dan is de score 0 punten. De speler telt het behaalde aantal punten op bij de score van zijn vorige beurten. Wie het eerst 100 punten (of meer) heeft, heeft gewonnen.

Hieronder zie je wat één van de spelers in zijn eerste drie beurten heeft gegooid met het daarbij behorende puntenverloop.

foto's

beurt 1



score 13 punten

beurt 2



score 0 punten

totaal $13+0 = 13$ punten

beurt 3



score 19 punten

totaal $13+19 = 32$ punten

Het gooien van tweemaal een 3, eenmaal een 2 en eenmaal een 5 met vier verschillend gekleurde dobbelstenen, zoals in beurt 1, kan op verschillende manieren gebeuren: je kunt bijvoorbeeld met de rode dobbelsteen een 2 gooien, maar ook met de witte dobbelsteen.

- 4p 15 Bereken het aantal manieren waarop je met vier verschillend gekleurde dobbelstenen tweemaal een 3, eenmaal een 2 en eenmaal een 5 kunt gooien.

Als je met meer dobbelstenen gooit, kun je hogere scores halen, maar de kans op 0 punten wordt ook groter.

De kans op 0 punten in een beurt waarin met n dobbelstenen wordt gegooid, $P_n(0)$, kan worden berekend met de volgende formule:

$$P_n(0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Iemand wil met veel dobbelstenen gooien in de hoop veel punten te behalen, maar wel zodanig dat de kans op 0 punten kleiner is dan 0,5.

3p **16** Bereken met hoeveel dobbelstenen er dan maximaal gegooid kan worden.

Voor een beurt waarin met twee dobbelstenen, bijvoorbeeld een rode en een blauwe, wordt gegooid, is na te gaan hoe groot de verwachtingswaarde van de score van die beurt is.

Op de uitwerkbijlage staat een tabel waarin de mogelijke scores van de beurt kunnen worden ingevuld. Je ziet bijvoorbeeld dat de score 0 is als met de rode dobbelsteen 1 en met de blauwe 6 is gegooid.

5p **17** Vul de tabel op de uitwerkbijlage in en bereken daarmee de verwachtingswaarde van de score van een beurt waarin met twee dobbelstenen wordt gegooid.

Voor een beurt waarin met een willekeurig aantal dobbelstenen wordt gegooid, kun je de verwachtingswaarde van de score berekenen met de formule:

$$E = 4n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Hierin is n het aantal dobbelstenen waarmee wordt gegooid.

Als je bij Hog streeft naar een zo groot mogelijke verwachtingswaarde van de score per beurt, dan kun je met deze formule onderzoeken met welk aantal dobbelstenen je het beste kunt gooien.

3p **18** Bij welk aantal dobbelstenen is de verwachtingswaarde van de score maximaal? Licht je antwoord toe.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Hoe hard kun je rijden?

Halverwege het jaar 2010 werd besloten om de maximumsnelheid op de snelweg – waar dat mogelijk is – te verhogen van 120 naar 130 km per uur. Er kwam kritiek op het besluit. In de media werd gemeld dat bij een verhoging naar 130 km per uur automobilisten pas bij 139 km per uur een boete zouden krijgen.

De meetapparatuur van de verkeerspolitie kan de snelheid van een auto niet exact meten. Daarom wordt een foutmarge gehanteerd.



Stel dat een automobilist rijdt met een snelheid van v km per uur. De snelheid die dan gemeten wordt, is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van v km per uur en een standaardafwijking van $0,0095 \cdot v$ km per uur.

De kans dat iemand ten onrechte een boete krijgt waar een maximum van 130 km per uur geldt, moet heel klein zijn, namelijk maximaal 0,0001. Stel dat iemand 130 km per uur rijdt. De standaardafwijking van de gemeten snelheid is dan 1,235.

3p 19 Bereken vanaf welke snelheid een boete gegeven wordt.

In werkelijkheid wordt op wegen met een maximumsnelheid van 130 km per uur de boete pas bij een gemeten snelheid van 139 km per uur gegeven.

Van 20 automobilisten die allemaal precies 138 km per uur rijden, waar de maximumsnelheid 130 km per uur is, wordt onafhankelijk van elkaar de snelheid gemeten.

4p 20 Bereken hoeveel van hen naar verwachting een boete zullen krijgen.

Om op zijn werk te komen, rijdt Johan een stuk over de A32 waar een maximumsnelheid van 130 km per uur geldt.

Op dat stuk rijdt hij altijd 139 km per uur omdat hij denkt dat hij dan nog geen boete zal krijgen.

Ga ervan uit dat de kans dat een automobilist bij 139 km per uur op deze weg een boete krijgt bij een snelheidsmeting 0,5 is.

De afgelopen 10 werkdagen is zijn snelheid elke dag één keer gemeten.

3p 21 Bereken de kans dat dit minder dan 5 boetes op zal leveren.