Examen HAVO

2013

tijdvak 2
woensdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Paracetamol in het bloed

Paracetamol is een veelgebruikte pijnstiller, die in tabletvorm te koop is. Voor volwassenen zijn er tabletten die 500 mg paracetamol bevatten.

Na het innemen van een tablet wordt de 500 mg paracetamol via maag en darmen bijna volledig in het bloed opgenomen. We gebruiken in deze opgave het volgende wiskundige model voor de opname van paracetamol in het bloed. Tien minuten na het innemen van een tablet is de helft van de paracetamol opgenomen in het bloed. De andere helft zit dan nog in maag en darmen. Van de achtergebleven paracetamol in maag en darmen wordt in de volgende tien minuten weer de helft opgenomen in het bloed. Ook daarna wordt iedere tien minuten de helft van de paracetamol die nog in maag en darmen zit, opgenomen in het bloed.

Een volwassene neemt om 9.00 uur één tablet van 500 mg in.

4p 1 Laat met een berekening zien dat na één uur ongeveer 492 mg paracetamol in het bloed is opgenomen.

De laatste 8 mg paracetamol in maag en darmen wordt niet in het bloed opgenomen. We gaan er verder in ons model van uit dat na ongeveer een uur de hoeveelheid paracetamol in het bloed door afbraak in de lever weer begint af te nemen.
Hierbij past de volgende formule

$$P = 492 \cdot 0{,}84^{(t-1)}, \text{ met } t \geq 1$$

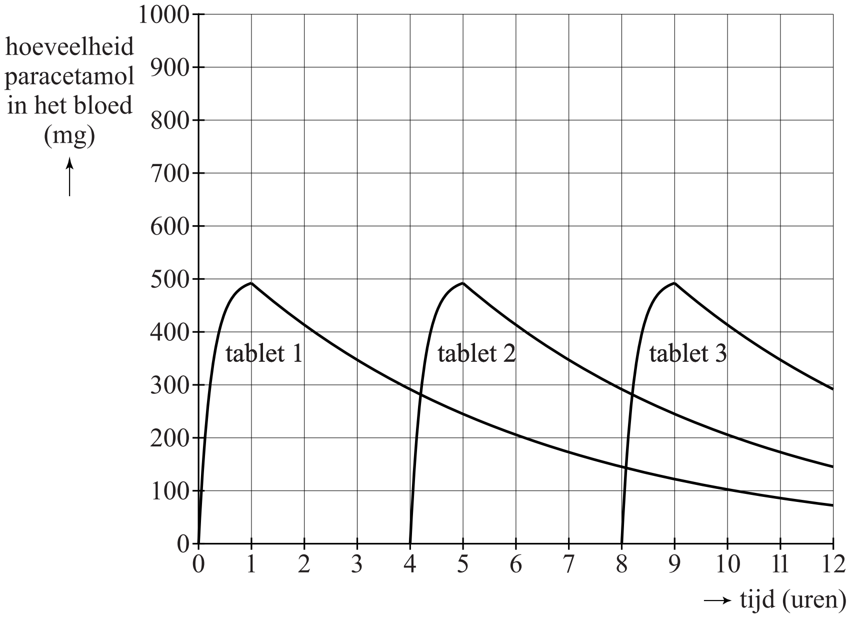
Hierin is P de hoeveelheid paracetamol in het bloed in mg en t de tijd in uren nadat de tablet is ingenomen.

Het pijnstillend effect is merkbaar zolang de hoeveelheid paracetamol in het bloed meer is dan 200 mg[1]. Als de hoeveelheid paracetamol onder de 200 mg zakt, is het pijnstillend effect niet meer merkbaar: de tablet is uitgewerkt.
Een volwassene die om 9.00 uur een tablet heeft ingenomen, zal merken dat deze tablet in de loop van de middag is uitgewerkt.

4p 2 Bereken op welk moment de tablet is uitgewerkt. Geef je antwoord in uren en minuten nauwkeurig.

Een volwassene heeft veel last van pijn en neemt volgens het voorschrift elke vier uur een tablet in. In de figuur kun je voor een periode van 12 uur **per tablet** de hoeveelheid paracetamol aflezen die op een bepaald moment in het bloed opgenomen is. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur

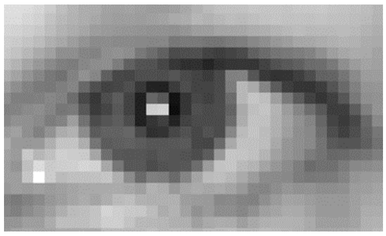


4p 3 Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van de **totale** hoeveelheid paracetamol in het bloed.

noot 1 We gaan hierbij uit van een volwassene met gemiddelde lengte en gewicht.

Resolutie

foto



Bij het afdrukken van een digitale foto wordt de foto in een heleboel kleine vierkantjes verdeeld, pixels genaamd. Elke pixel krijgt een bepaalde kleur en alle pixels samen geven een afdruk van de foto. Het aantal pixels wordt bepaald door de gekozen **resolutie**.
Bij een lage resolutie wordt de foto in weinig pixels verdeeld. Soms kun je dan de afzonderlijke pixels zien. Zie de foto.
Bij een hoge resolutie wordt de foto in veel pixels verdeeld: de afdruk is scherp en je kunt niet meer zien dat de foto in vierkantjes is verdeeld. Bij de keuze voor een hoge resolutie wordt voor het opslaan van de foto wel veel geheugenruimte gebruikt.

De totale hoeveelheid pixels P die een foto bevat, is afhankelijk van de gekozen resolutie R en van de lengte l en de breedte b van de foto. Er geldt

$$P = 0{,}1550 \cdot l \cdot b \cdot R^2$$

Hierin zijn l en b in cm en R in dpi (pixels per inch).

Een foto van 15 bij 10 cm bevat 3,72 miljoen pixels.

3p **4** Bereken welke resolutie gekozen is.

In deze opgave gaan we uit van foto´s waarbij de lengte anderhalf keer zo groot is als de breedte. Voor deze foto´s geldt

$$l = 1{,}5 \cdot b$$

Voor deze foto´s kun je de twee bovenstaande formules combineren. Dit levert de volgende formule

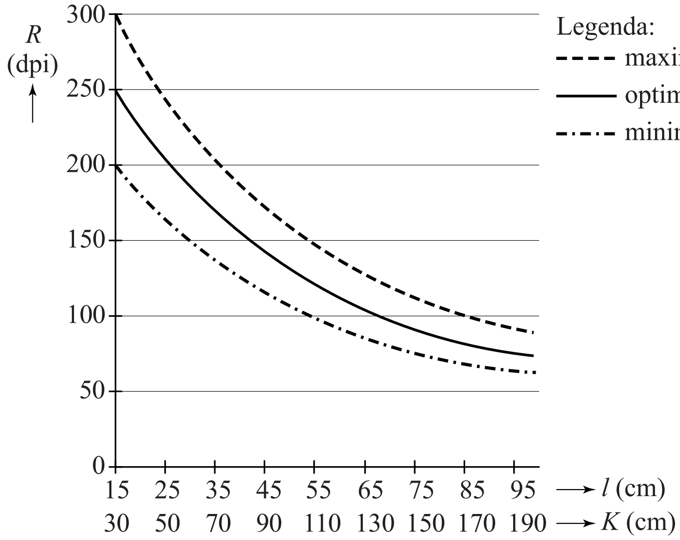
$$P = 0{,}1033 \cdot l^2 \cdot R^2$$

3p **5** Laat zien hoe je deze laatste formule kunt herleiden uit de twee eerdere formules.

Bij een grote foto kan een lagere resolutie worden gekozen dan bij een kleine foto. Dit heeft te maken met de kijkafstand K tot de foto. Een foto van 15 bij 10 cm bekijkt men gewoonlijk op een kijkafstand van ongeveer 30 cm. Bij een foto van 30 bij 20 cm is de kijkafstand gewoonlijk 60 cm.

In de figuur zie je het verband tussen de lengte l van de foto, de kijkafstand K en verschillende resoluties R.

figuur



Bij een resolutie onder de minimale resolutie is de foto onscherp: je ziet dan dat hij is opgebouwd uit pixels. Bij een resolutie boven de maximale resolutie wordt er voor de foto onnodig veel geheugenruimte gebruikt.

Er is sprake van een (recht) evenredig verband tussen K en l.

3p **6** Stel een formule op voor K uitgedrukt in l. Licht je antwoord toe.

Een foto van 30 bij 20 cm wordt tweemaal afgedrukt: eenmaal bij de minimale en eenmaal bij de maximale resolutie. De foto bij de maximale resolutie bevat veel meer pixels dan die bij de minimale resolutie.

4p **7** Bereken hoeveel pixels het verschil tussen beide foto's is.

Tussen de minimale en de maximale resolutie ligt de optimale resolutie: de foto is bij deze resolutie goed scherp en er wordt niet te veel geheugenruimte gebruikt.
Voor grote foto's wordt de optimale resolutie bij een kijkafstand K (in cm) bij benadering gegeven door de formule

$$R_{optimaal} = 5500 \cdot K^{-0,812}$$

Iemand maakt een afdruk van een foto voor een reclamebord. De foto moet bij een kijkafstand van 12 meter scherp te zien zijn. De afmetingen van de foto zijn 6,0 bij 4,0 meter. De foto heeft in totaal 14,9 miljoen pixels.

4p **8** Onderzoek met de gegeven formules of de resolutie van deze foto hoger of lager dan de optimale resolutie is.

Hog

Hog is een dobbelspelletje dat wordt gespeeld door twee spelers die om de beurt één keer gooien met zoveel dobbelstenen als ze maar willen. Dat aantal dobbelstenen mag elke beurt wisselen.
Eerst wordt er geloot wie er mag beginnen. De speler die aan de beurt is, gooit met de dobbelstenen. De score van deze beurt wordt berekend door de som van de ogen te bepalen. Maar pas op: als er met één of meer van de dobbelstenen een 1 is gegooid, dan is de score 0 punten. De speler telt het behaalde aantal punten op bij de score van zijn vorige beurten. Wie het eerst 100 punten (of meer) heeft, heeft gewonnen.
Hieronder zie je wat één van de spelers in zijn eerste drie beurten heeft gegooid met het daarbij behorende puntenverloop.

foto's

beurt 1

score 13 punten

beurt 2

score 0 punten
totaal 13+0 = 13 punten

beurt 3

score 19 punten
totaal 13+19 = 32 punten

Het gooien van tweemaal een 3, eenmaal een 2 en eenmaal een 5 met vier verschillend gekleurde dobbelstenen, zoals in beurt 1, kan op verschillende manieren gebeuren: je kunt bijvoorbeeld met de rode dobbelsteen een 2 gooien, maar ook met de witte dobbelsteen.

4p **9** Bereken het aantal manieren waarop je met vier verschillend gekleurde dobbelstenen tweemaal een 3, eenmaal een 2 en eenmaal een 5 kunt gooien.

Als je met minstens één van de dobbelstenen een 1 gooit, dan heb je 0 punten.

2p **10** Schrijf alle mogelijkheden uit om met twee verschillend gekleurde dobbelstenen 0 punten te halen.

Hoe meer verschillend gekleurde dobbelstenen je gebruikt, hoe hoger de maximale score wordt die je kunt halen. Het aantal mogelijkheden om 0 punten te halen stijgt echter ook als je meer dobbelstenen gebruikt. Het aantal mogelijkheden A om 0 punten te halen bij n dobbelstenen wordt berekend met de formule

$$A = 6^n - 5^n$$

Voor $n = 4$ geeft deze formule de uitkomst $6^4 - 5^4 (= 671)$.

3p **11** Geef een redenering waarom deze formule klopt voor vier dobbelstenen. Schrijf hierbij niet alle mogelijkheden uit.

Als je in plaats van n dobbelstenen met één dobbelsteen meer gooit, dus als je met $n+1$ dobbelstenen gooit, kun je het aantal mogelijkheden om 0 punten te halen als volgt beredeneren.
Er zijn twee gevallen:
- Je haalt met de eerste n dobbelstenen al 0 punten. Dan maakt het niet uit wat je met de extra dobbelsteen gooit.
  Dit zijn dus $A \cdot 6$ mogelijkheden.
- Je gooit met de eerste n dobbelstenen geen een keer 1. Dan moet je met de extra dobbelsteen een 1 gooien. Dit zijn $5^n \cdot 1$ mogelijkheden.

In totaal zijn dit dus $6 \cdot A + 5^n$ mogelijkheden.

De uitkomst van bovenstaande redenering moet hetzelfde zijn als die uit de formule met $n+1$ dobbelstenen.

3p **12** Toon met een herleiding aan dat $6 \cdot A + 5^n$ gelijk is aan $6^{n+1} - 5^{n+1}$.

Korting

In de handel is het gebruikelijk om korting te geven als een klant veel exemplaren van een bepaald product bestelt.

Kwantumkorting
Een manier om klanten korting te geven, is de kwantumkorting. Er wordt dan een procentuele korting gegeven op de kosten van de hele bestelling. Hierbij geldt: hoe meer exemplaren besteld worden, hoe hoger de korting. Een klant krijgt bij bedrijf A kwantumkorting op een product met een stukprijs (de prijs per exemplaar) van 7,50 euro. Het bedrijf geeft kwantumkorting volgens tabel 1.

tabel 1 **Bedrijf A: kwantumkorting**

bestelling	korting op de kosten van de hele bestelling in %
tot en met 10 000 exemplaren	0
van 10 001 tot en met 20 000 exemplaren	25
van 20 001 tot en met 50 000 exemplaren	50
vanaf 50 001 exemplaren	70

Bij kwantumkorting kun je soms beter iets meer exemplaren bestellen dan je nodig hebt, omdat je daarmee in totaal voordeliger uit bent.

3p 13 Geef hier met behulp van tabel 1 een voorbeeld van.

Staffelkorting
Een andere manier om klanten korting te geven is staffelen. Daarbij kan een klant ook korting krijgen, maar slechts over één of meer gedeelten van de bestelling. Voor de eerste exemplaren moet een klant de normale prijs per stuk betalen. Daarna wordt er per volgende hoeveelheid een steeds lagere prijs per stuk betaald.
Een klant krijgt bij een ander bedrijf, bedrijf B, op hetzelfde product staffelkorting volgens tabel 2. Hierin zie je dat de eerste 5000 exemplaren 7,50 euro per stuk kosten en dat de volgende 5000 exemplaren 5 euro per stuk kosten. Daarna neemt stapsgewijs de prijs per stuk nog verder af.

tabel 2 Bedrijf B: staffelkorting

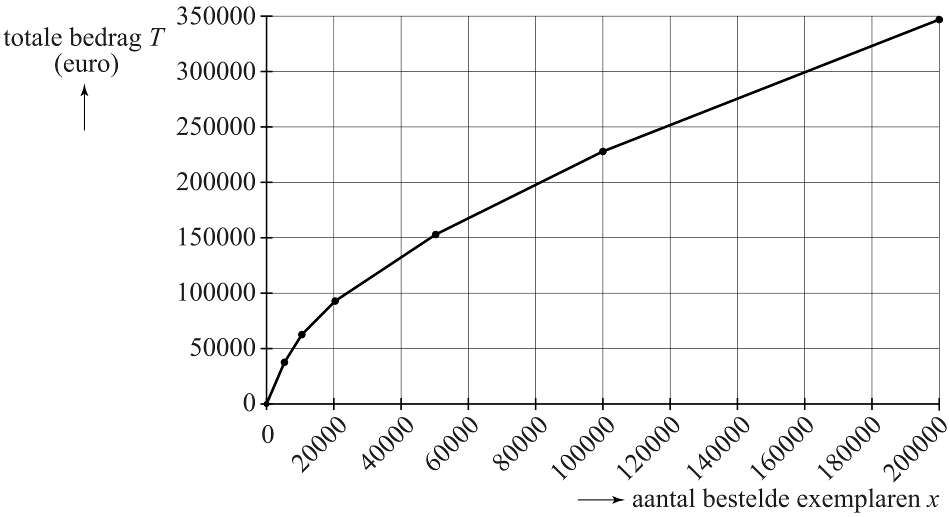
	prijs per stuk in euro
De exemplaren 1 tot en met 5000 kosten per stuk	7,50
De exemplaren 5001 tot en met 10 000 kosten per stuk	5,-
De exemplaren 10 001 tot en met 20 000 kosten per stuk	3,-
De exemplaren 20 001 tot en met 50 000 kosten per stuk	2,-
De exemplaren 50 001 tot en met 100 000 kosten per stuk	1,50
De exemplaren 100 001 tot en met 200 000 kosten per stuk	1,20

Een klant wil een bestelling plaatsen van 45 000 exemplaren.

4p 14 Onderzoek welk van de bedrijven, A of B, voor deze klant het voordeligst is.

In het vervolg van deze opgave bekijken we de staffelkorting uitvoeriger. Het totale bedrag dat betaald moet worden volgens tabel 2 kan worden uitgezet in een grafiek. Deze grafiek bestaat uit zes verschillende lijnstukken. In de figuur is deze grafiek afgebeeld. In de grafiek is x het aantal bestelde exemplaren en T het totale bedrag in euro.

figuur



Bij de verschillende delen van de grafiek horen formules van de vorm $T = a \cdot x + b$.

4p 15 Stel met de gegevens van tabel 2 de formule op voor T bij een bestelling van 5001 tot en met 10 000 exemplaren.

De grafiek met de verschillende lijnstukken kan benaderd worden door een vloeiende kromme. Bij deze kromme hoort de formule

$$T_{benaderd} = 260 \cdot x^{0,59}$$

Hierin is $T_{benaderd}$ het totale (benaderde) bedrag in euro en x het aantal bestelde exemplaren.

De formule voor $T_{benaderd}$ kan worden gebruikt om de prijs per stuk die betaald moet worden voor de exemplaren 10 001 tot en met 20 000 te benaderen. Hiervoor gebruik je de gemiddelde verandering van $T_{benaderd}$ op het interval van 10 001 tot en met 20 000.

5p 16 Bereken hoeveel de prijs per stuk volgens deze benadering afwijkt van de stukprijs zoals gegeven in tabel 2.

Bij elke bestelling kan met behulp van de formule van $T_{benaderd}$ de gemiddelde prijs per stuk berekend worden. Daarvoor moet het totale bedrag $T_{benaderd}$ gedeeld worden door het aantal bestelde exemplaren x.
Een klant wil zoveel exemplaren bestellen, dat de gemiddelde prijs per stuk 2,75 euro is.

4p 17 Onderzoek hoeveel exemplaren deze klant moet bestellen. Rond het antwoord af op duizendtallen.

Paracetamol slikken

De pijnstiller paracetamol wordt veel gebruikt. Op de bijsluiter staat onder andere het volgende vermeld.

> **Dosering**
> Volwassenen: één of twee tabletten van 500 mg per keer,
> maximaal zes tabletten per 24 uur.

Mevrouw Jansen heeft flinke pijn en neemt het maximale aantal van 6 tabletten op een dag in. Ze houdt zich aan het voorschrift op de bijsluiter en neemt 1 of 2 tabletten per keer in.
Ze kan steeds 1 tablet innemen. Ze kan ook eerst 2 tabletten innemen en daarna steeds 1 tablet, of eerst vier keer 1 tablet en daarna nog één keer 2 tabletten. Zo zijn er nog meer mogelijkheden te bedenken.

5p 18 Bereken het totaal aantal mogelijkheden om de 6 tabletten in te nemen.

Meneer Pietersen, die 72 kg weegt, neemt twee tabletten tegelijk in. Na een uur is 98,4% van de hoeveelheid paracetamol in het bloed opgenomen. Als bekend is hoeveel bloed hij heeft, kun je berekenen hoeveel mg paracetamol per liter er in zijn bloed zit.
Daarvoor is voor volwassenen de volgende vuistregel te gebruiken: het aantal liter bloed is 0,08 keer het gewicht in kg.

3p **19** Bereken hoeveel mg paracetamol per liter in het bloed van meneer Pietersen zit, een uur na inname van de tabletten.

We kijken nu naar de afname van de hoeveelheid paracetamol in het bloed.
Als er twee tabletten tegelijk worden ingenomen in plaats van één, wordt de hoeveelheid paracetamol in het bloed iedere minuut 0,2% minder.

4p 20 Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid paracetamol in het bloed per uur afneemt.

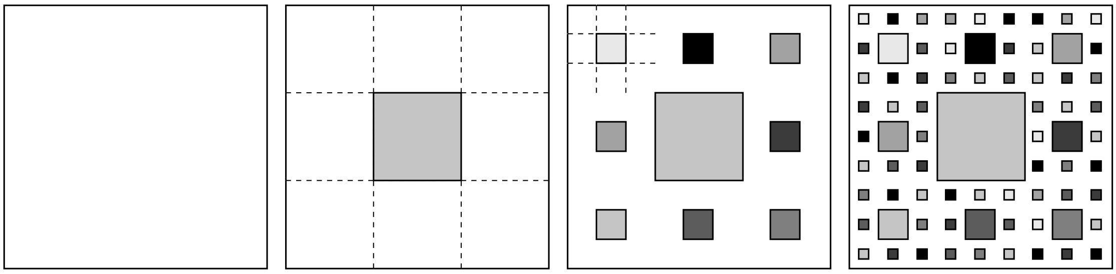
Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Kunstwerk

Een kunstenaar maakt een kunstwerk volgens een vastgesteld stappenplan. Hij begint met een geheel wit doek van 270 bij 270 cm. Dit is het kunstwerk in fase 0. Hij verdeelt dit doek in 9 vierkanten van 90 bij 90 cm. Het middelste vierkant geeft hij een andere kleur. Dit is het kunstwerk in fase 1.

De overige 8 witte vierkanten verdeelt hij ieder opnieuw in 9 kleinere vierkanten en telkens geeft hij het middelste vierkant een door hemzelf gekozen kleur. Nu is het kunstwerk in fase 2.
De overgebleven witte vierkanten worden opnieuw in negenen verdeeld en opnieuw worden de middelste vierkantjes gekleurd. Daarmee is het kunstwerk in fase 3. Zie de figuur.

figuur



fase 0 fase 1 fase 2 fase 3

De kunstenaar gaat op deze manier door tot fase 6, het uiteindelijke kunstwerk.

Het kunstwerk krijgt bij elke fase steeds meer gekleurde vierkantjes. Daarmee wordt de oppervlakte van het gedeelte van het doek dat nog wit is steeds kleiner. In de tabel is voor verschillende fasen het aantal gekleurde vierkantjes aangegeven. Deze tabel staat ook op de uitwerkbijlage.

tabel

fase	0	1	2	3	4	5	6
aantal nieuwe gekleurde vierkantjes	-	1	8	64			
totaal aantal gekleurde vierkantjes	0	1	9				

8p **21** Onderzoek hoeveel gekleurde vierkantjes het kunstwerk uiteindelijk bevat en hoeveel procent van het doek dan nog wit is. Je kunt hierbij de tabel op de uitwerkbijlage gebruiken.