

Examen HAVO

**2014**

tijdvak 1  
woensdag 14 mei  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde A (pilot)**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

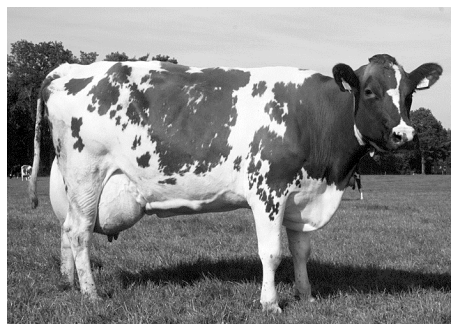
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

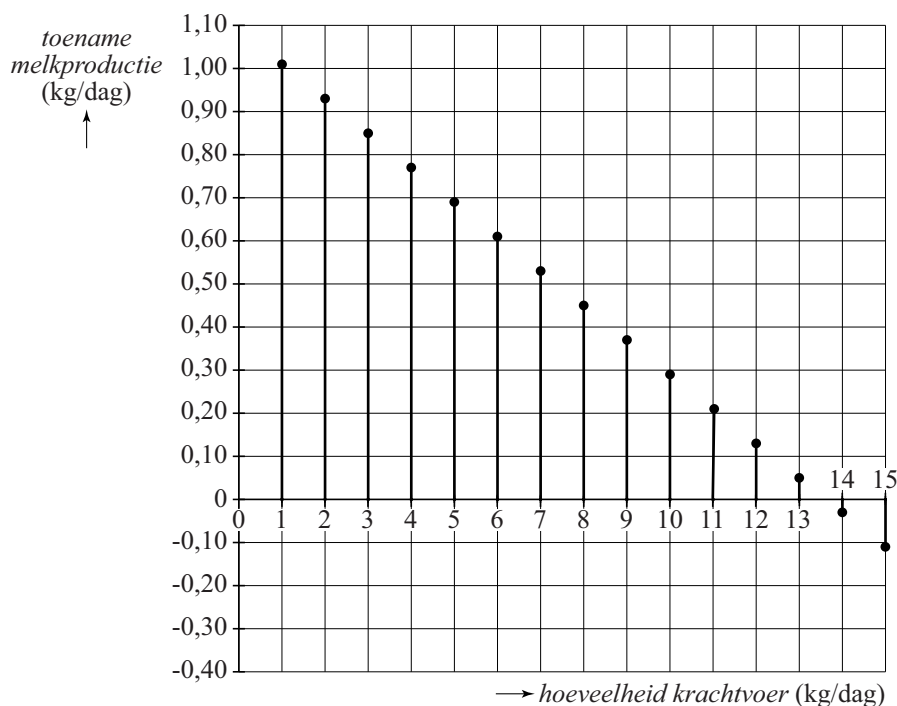
## Krachtvoer voor melkkoeien

De voeding van een melkkoe bestaat vooral uit ruwvoer, zoals gras en hooi. Om een melkkoe meer melk te laten geven, wordt deze bijgevoerd met krachtvoer.

In een onderzoek van het Wageningen University & Research Centre is geëxperimenteerd met de hoeveelheid krachtvoer die een koe dagelijks krijgt en de invloed ervan op de melkproductie. De resultaten zijn weergegeven in een toenamediaagram. Zie de figuur. Je kunt hierin bijvoorbeeld zien dat de melkproductie met 0,93 kg per dag toeneemt als de hoeveelheid krachtvoer toeneemt van 1 naar 2 kg per dag.



**figuur**



Bij een bepaalde hoeveelheid krachtvoer is de melkproductie van een koe maximaal. Met behulp van het toenamediaagram kan geschat worden welke hoeveelheid krachtvoer dat is.

- 3p 1 Bepaal deze hoeveelheid (in kg per dag) met behulp van het toenamediaagram. Licht je antwoord toe.

Krachtvoer is duur en daarom zal een melkveehouder zuinig zijn met de hoeveelheid krachtvoer die hij zijn koeien geeft. De melkveehouder wil de extra kosten van het krachtvoer wel terugverdienen met de opbrengst van de extra melkproductie. Op een bepaald moment is de melkprijs € 0,29 per kg en de prijs van krachtvoer € 0,20 per kg.

Een melkveehouder overweegt de hoeveelheid krachtvoer voor een koe te verhogen van 5 kg per dag naar 6 kg per dag.

- 3p **2** Laat zien dat dit niet verstandig is. Gebruik het toenamediagram.

De onderzoekers hebben een verband geformuleerd tussen de hoeveelheid krachtvoer die een koe krijgt en de hoeveelheid melk die zij produceert. Er geldt:

$$M = -0,04 \cdot V^2 + 1,05 \cdot V + 27,2$$

Hierin is  $V$  de hoeveelheid krachtvoer in kg per dag en  $M$  de melkproductie in kg per dag.

Voor de melkveehouder is vooral de winst  $W$  in euro per koe per dag belangrijk. De winstformule bij een melkprijs van € 0,29 per kg en een krachtvoerprijs van € 0,20 per kg is:

$$W = 0,29 \cdot M - 0,20 \cdot V$$

- 3p **3** Bereken de winst  $W$  wanneer een koe 4 kg krachtvoer per dag krijgt.

Als je de formule van  $M$  invult in de formule van  $W$ , ontstaat de formule

$$W = 0,29 \cdot (-0,04 \cdot V^2 + 1,05 \cdot V + 27,2) - 0,20 \cdot V$$

Je kunt deze formule herleiden tot de vorm  $W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c$ .

- 3p **4** Laat deze herleiding zien.

Hij is tegenwoordig niet meer weg te denken: de mobiele telefoon. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen mobiele telefoons. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen.

In deze periode was er sprake van exponentiële groei.

- 4p 5 Bereken met welk percentage het aantal mobiele telefoons jaarlijks toenam.

Je zou misschien denken dat er eind 2009 ook 20 miljoen mobiele telefoonnummers bestonden, maar er waren toen veel meer mobiele telefoonnummers dan mobiele telefoons.

In Nederland beginnen mobiele telefoonnummers met 06, gevolgd door een van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 of 8. Voor de overige cijfers worden alle cijfers van 0 tot en met 9 gebruikt. Het telefoonnummer bestaat in totaal uit tien cijfers.

Eind 2009 was al 82,2% van de beschikbare mobiele telefoonnummers uitgegeven.

- 3p 6 Bereken hoeveel mobiele telefoonnummers er in Nederland eind 2009 al waren uitgegeven.

De mobiele telefoon wordt vaak gebruikt om een tekstbericht te schrijven. Lange tijd hadden mobiele telefoons een toetsenbord zoals in de figuur. Het intypen van teksten met zo'n toetsenbord werkt vaak met het **T9**-systeem. T9 is een afkorting van 'Tekst op 9 toetsen'<sup>1)</sup>.

Dit systeem werkt als volgt: wanneer je een letter wilt typen, dan druk je eenmaal op de toets waar die letter op staat. Wil je bijvoorbeeld het woord 'hoi' typen, dan gebruik je de drie toetsen 4 (GHI) 6 (MNO) 4 (GHI).

Het T9-systeem zoekt in de ingebouwde woordenlijst naar het woord dat je zou kunnen bedoelen.

Er wordt met het T9-systeem ingetypt: 945. Dit kan bij elk van de woorden 'wik', 'wil', 'wij' of 'zij' horen. Als de mobiele telefoon geen woordenlijst zou bevatten, zou ook een niet-bestaand woord als 'yjk' of 'xik' bedoeld kunnen zijn.

- 3p 7 Bereken hoeveel woorden, bestaande en niet-bestaande samen, bij 945 horen.

figuur



noot 1 Het T9-systeem maakt gebruik van de negen toetsen 2 tot en met 9 en 0. De 0 wordt gebruikt om een spatie in te voeren.

Een woordenlijst op een mobiele telefoon bevat heel veel woorden. Zodra je een toets indrukt, valt een groot deel van de woorden in de woordenlijst af. Bij elke volgende toets vallen er meer woorden af.

We bekijken een model waarbij een mobiele telefoon een woordenlijst bevat van 300 000 woorden. De letters zijn verdeeld over 8 toetsen. Dit houdt in dat bij elk cijfer dat wordt ingetoetst, steeds  $\frac{7}{8}$  deel van het overgebleven aantal woorden afvalt. Bij een lang woord blijf je toetsen indrukken totdat het **uniciteitspunt** bereikt wordt: het punt waarop er slechts één woord van de woordenlijst over is. Bij zo'n lang woord uit de woordenlijst wordt het uniciteitspunt al bereikt voordat het laatste cijfer is ingetoetst.

- 4p   **8**   Bereken hoe vaak je in dit model een cijfer moet intoetsen om voor een lang woord uit die woordenlijst het uniciteitspunt te bereiken.

## Van score naar cijfer

---

Als je examen hebt gedaan, ben je vaak erg benieuwd naar het cijfer. Thuis kijk je op internet welke vragen je goed had en hoeveel scorepunten je daarmee verdiend zou hebben. Maar welk cijfer hoort daarbij?

Vanaf het jaar 2000 wordt bij veel vakken dezelfde formule gebruikt om het cijfer te berekenen. Deze zogenaamde **hoofdformule** luidt:

$$C = 9 \cdot \frac{S}{L} + N$$

In deze formule is  $C$  het cijfer,  $S$  het aantal behaalde scorepunten,  $L$  het maximaal te behalen aantal scorepunten bij het examen en  $N$  de **normeringsterm**.

Er geldt:  $S$  en  $L$  zijn gehele getallen en  $N$  is een getal met één decimaal, minimaal 0,0 en maximaal 2,0.  $C$  wordt afgerond op één decimaal.

Bij normeringsterm  $N = 1,0$  wordt aan de volgende voorwaarden voldaan:

- een leerling die geen enkel scorepunt heeft behaald, krijgt het cijfer 1;
- een leerling die alle scorepunten heeft behaald, krijgt het cijfer 10;
- een leerling die precies de helft van het aantal scorepunten heeft behaald, krijgt het cijfer 5,5.

- 4p 9 Laat met de hoofdformule zien dat bij  $N = 1,0$  voor elke waarde van  $L$  aan alle drie de voorwaarden voldaan is.

Afhankelijk van de moeilijkheidsgraad van een examen wordt de normeringsterm  $N$  vastgesteld. Normaal gesproken geldt  $N = 1,0$ , maar als een examen erg moeilijk was, wordt bijvoorbeeld gekozen voor  $N = 1,6$ . Zo'n examen is dan 0,6 'opgewaardeerd'.

Een te gemakkelijk examen kan worden 'afgewaardeerd', dat wil zeggen: naar beneden worden bijgesteld. In dat geval is  $N$  kleiner dan 1,0.

Als een examen wordt op- of afgewaardeerd, is er wel een probleem: het cijfer zou hoger dan 10 of lager dan 1 kunnen worden en dat mag niet.

Bij een examen met  $L = 75$  en  $N = 1,8$  zou je al een 10 kunnen halen terwijl je niet alle scorepunten hebt behaald.

- 4p 10 Bereken hoeveel scorepunten je maximaal mag missen om toch een 10 te halen bij het gebruik van de hoofdformule.

Het hiervoor besproken probleem wordt als volgt opgelost. Eerst worden de grafieken getekend van de hoofdformule bij  $N = 0,0$  en  $N = 2,0$ . Daarna worden de grafieken getekend behorend bij de onderstaande vier formules

$$(1) \quad C = 1 + S \cdot \frac{9}{L} \cdot 0,5$$

$$(3) \quad C = 10 - (L - S) \cdot \frac{9}{L} \cdot 0,5$$

$$(2) \quad C = 1 + S \cdot \frac{9}{L} \cdot 2$$

$$(4) \quad C = 10 - (L - S) \cdot \frac{9}{L} \cdot 2$$

Hoewel de grafieken van al deze formules in feite uit losse punten bestaan, gaan we er in deze opgave van uit dat ze rechte lijnen zijn. Op de uitwerkbijlage staat de figuur voor een examen met  $L = 80$ .

Formule (4) is bij  $L = 80$  te herleiden tot de vorm  $C = a \cdot S + b$ .

- 4p 11 Geef deze herleiding en bepaal hiermee de waarden van  $a$  en  $b$ .

Als de normeringsterm  $N$  bekend is, wordt de grafiek van de hoofdformule bij deze  $N$  in de figuur getekend. Het cijfer wordt berekend met de hoofdformule. Dit mag echter alleen bij scores waarvan de grafiek binnen het grijze gebied ligt. Voor sommige heel lage of heel hoge scores ligt de grafiek van de hoofdformule echter buiten het grijze gebied. In dat geval wordt de formule van de dichtstbijzijnde grafiek (1), (2), (3) of (4) gebruikt om het juiste cijfer te bepalen. Op deze manier wordt ervoor gezorgd dat het laagste cijfer altijd 1 en het hoogste cijfer altijd 10 is.

Als voorbeeld is in de figuur op de uitwerkbijlage de hoofdformule met  $N = 1,5$  getekend. Je ziet dat voor heel lage scores formule (2) moet worden gebruikt.

Een leerling heeft een examen met  $L = 80$  gemaakt. De normeringsterm is nog niet bekend.

- 3p 12 Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage vanaf welke score deze leerling zeker is van het cijfer 5,5 of hoger.

Een andere leerling heeft het examen heel goed gemaakt: van de maximaal 80 te behalen scorepunten heeft hij er 77 behaald. Omdat het examen erg gemakkelijk blijkt te zijn, geldt  $N = 0,4$ .

Met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage en de gegeven formules kan het cijfer van deze leerling worden berekend.

- 4p 13 Onderzoek welk cijfer deze leerling krijgt. Laat zien hoe je de figuur op de uitwerkbijlage hierbij hebt gebruikt.

## Honkbal

In Amerika is honkbal een van de populairste sporten. De resultaten van Amerikaanse topteams worden dan ook zorgvuldig bijgehouden. Na elke wedstrijd wordt genoteerd hoeveel punten een team gescoord heeft (scorepunten) en hoeveel tegenpunten het team heeft moeten incasseren. Ook wordt genoteerd of het team gewonnen of verloren heeft.



Gelijkspel is onmogelijk. Aan het einde van het seizoen wordt van ieder team het aantal gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten gepubliceerd.

Er lijkt een verband te zijn tussen het percentage gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten van een team. Over een heel seizoen geldt voor een team bij benadering de volgende formule:

$$P = \frac{100 \cdot S^2}{S^2 + T^2}$$

Hierin is  $P$  het percentage gewonnen wedstrijden in het seizoen,  $S$  het totaal aantal scorepunten en  $T$  het totaal aantal tegenpunten in het seizoen.

In het honkbalseizoen van 2012 behaalden de New York Yankees 804 scorepunten en kregen ze 668 tegenpunten. Het team won 95 wedstrijden en verloor er 67.

Het verschil tussen het percentage werkelijk gewonnen wedstrijden en het percentage dat de formule geeft, is kleiner dan 1.

3p 14 Toon dit aan.

Voor teams die in een seizoen twee keer zoveel tegenpunten als scorepunten krijgen, geldt  $T = 2 \cdot S$ . Als je dit invult in de formule van  $P$ , ontstaat een nieuwe formule van  $P$ . Door die formule te herleiden, kun je laten zien dat er in deze situatie voor  $P$  altijd hetzelfde getal uitkomt.

4p 15 Geef deze herleiding.



De formule van  $P$  wordt ook wel anders geschreven, namelijk als:

$$P = 100 - \frac{100}{V^2 + 1}$$

Hierin is  $V$  het aantal scorepunten per tegenpunt.

- 3p **16** Beredeneer aan de hand van laatstgenoemde formule van  $P$  dat geldt: hoe groter de waarde van  $V$  is, des te groter is de waarde van  $P$ .

Een team wil in een seizoen minstens 95% van de wedstrijden winnen.

- 4p **17** Bereken hoeveel scorepunten het team dan minimaal per tegenpunt moet halen. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

## Wat zeg je?

---

Een veelgehoorde klacht is: “Ik hoor je wel, maar ik versta je niet.” Je hoort nog wel dát er iets gezegd wordt, maar je hersenen moeten hard werken om te verstaan wát er precies gezegd wordt. Dit wordt een **versta-probleem** genoemd.

Niet alleen ouderen, ook heel wat jongeren hebben versta-problemen. Sinds een paar jaar is er een test waarmee je kunt bepalen of je versta-problemen hebt. Bij deze test krijg je 10 woorden te horen met achtergrondlawaai. Je moet op het antwoordformulier aangeven welk woord je gehoord hebt. Per woord zijn er vier keuzemogelijkheden.

- 3p **18** Bereken op hoeveel verschillende manieren je het antwoordformulier kunt invullen.

Aan de hand van het resultaat van de test kun je bepalen hoe goed je in een lawaaiige omgeving kunt verstaan wat er gezegd wordt. Er geldt:

- Geen problemen: 8 of meer goede antwoorden.  
Verstaanbaarheid in lawaai is in orde.
- Het grijze gebied: 6 of 7 goede antwoorden.  
In een lawaaiige omgeving kun je niet altijd verstaan wat er gezegd wordt. Gesprekken volgen kan moeilijk zijn.
- Serieuze versta-problemen: 5 of minder goede antwoorden.  
Je mist veel woorden in een gesprek. Het volgen van een groepsgesprek is nagenoeg onmogelijk geworden.

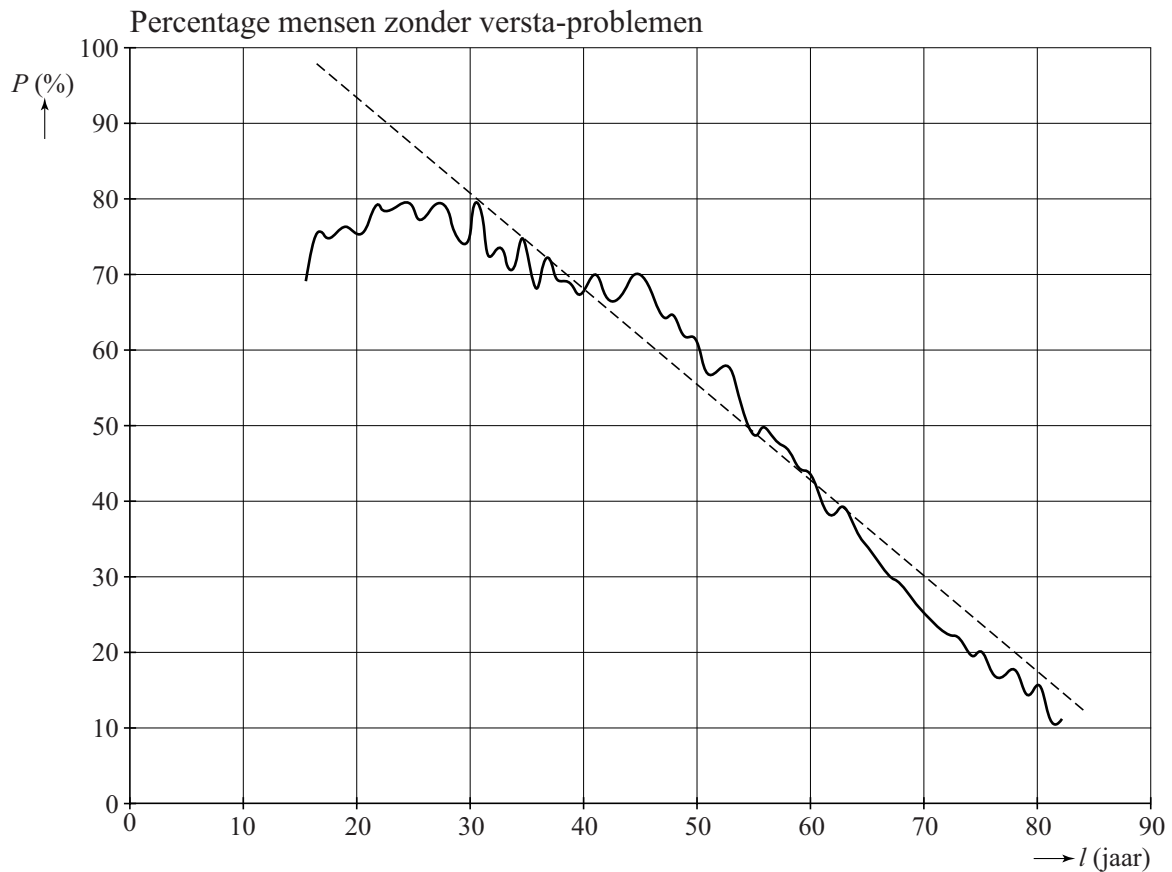
Nadat je de test gedaan hebt, krijg je het resultatenlijstje dat aangeeft welke woorden je goed en welke je fout hebt. Miranda doet de test en krijgt als resultatenlijstje G-G-G-G-F-G-G-G-F-G. Ze heeft dus het vijfde en het negende woord fout en valt met 8 goede antwoorden in de categorie ‘geen problemen’.

Er zijn meer resultatenlijstjes mogelijk waarmee je in de categorie ‘geen problemen’ valt.

- 4p **19** Bereken hoeveel resultatenlijstjes er in totaal mogelijk zijn bij de categorie ‘geen problemen’.

In België werd de versta-test in 2009 door een grote groep Vlamingen van 16 jaar en ouder gemaakt. Een deel van de resultaten is verwerkt in de figuur.

**figuur**



Eén van de uitkomsten was te verwachten: naarmate de leeftijd vordert, wordt het percentage mensen zonder versta-problemen kleiner. Deze trend is aangegeven in de figuur: er is bij benadering een lineair verband tussen het percentage mensen  $P$  zonder versta-problemen en de leeftijd  $l$ .

5p **20** Stel de formule op van de in de figuur getekende trendlijn.

Je zou verwachten dat de trend ook geldt voor jonge mensen: hoe jonger, des te hoger het percentage zonder versta-problemen. Dit blijkt echter niet zo te zijn, zoals je ook in de figuur kunt zien. Er zijn veel meer jongeren met versta-problemen dan je zou verwachten. Hoogstwaarschijnlijk komt dit door het veelvuldig luisteren naar muziek via mp3-spelers, telefoons en dergelijke door deze groep.

Julia schrijft een artikel over versta-problemen bij jongeren in de schoolkrant, voorzien van de figuur. Zij wil de volgende zin schrijven: "Het aantal 17-jarigen met versta-problemen is ... keer zo groot als het aantal dat je op grond van de trendlijn zou verwachten."

Op de plaats van de puntjes moet een geheel getal komen te staan.

5p **21** Bereken dit getal.

**Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.**

## Wind delen met wind-delen

---

Tegenwoordig wordt in sommige huishoudens de milieubewuste keuze gemaakt om zelf stroom op te wekken met een eigen windmolen. Dit is mogelijk door met meerdere huishoudens een windmolen te kopen. Daarbij wordt de windmolen opgedeeld in 10 000 delen, wind-delen genoemd. Een huishouden dat meedoet, koopt een of meer wind-delen.



Eén wind-deel kost € 351. Daarvoor krijg je dan 16 jaar lang jaarlijks 500 kWh (kilowattuur) stroom. De molen moet ook onderhouden worden: daarom moet je voor elk wind-deel dat je koopt € 17 per jaar aan onderhoudskosten betalen.

Meneer Kruizinga weet uit ervaring dat zijn gezin ongeveer 4000 kWh per jaar gebruikt. Hij overweegt wind-delen te kopen, maar hij maakt eerst een berekening van de kosten, waarbij hij uitgaat van een jaarlijks gebruik van 4000 kWh. Daartoe weegt hij onderstaande mogelijkheden tegen elkaar af.

### **Mogelijkheid 1**

Hij koopt 8 wind-delen, zodat hij 16 jaar lang jaarlijks 4000 kWh stroom krijgt. Hij moet wel belasting betalen over deze stroom, namelijk € 0,07 per kWh.

### **Mogelijkheid 2**

Hij koopt geen wind-delen. Hij blijft de komende 16 jaar alle stroom bij zijn huidige energiemaatschappij kopen voor € 0,22 per kWh. Belasting is bij dit bedrag inbegrepen.

Het totale bedrag dat hij uitspaart door geen wind-delen te kopen en geen onderhoudskosten te betalen, zet hij direct aan het begin van de periode van 16 jaar op een spaarrekening met een rente van 3,0% per jaar.

8p 22 Onderzoek welke mogelijkheid voor meneer Kruizinga het voordeligst is.