Examen VWO

2022

tijdvak 1
vrijdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
verschilregel	$v(x) = f(x) - g(x)$	$v'(x) = f'(x) - g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log\left(a^{p}\right) = p \cdot {}^{g}\log(a)$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log(a) = \dfrac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Blindsimultaandammen

Blindsimultaandammen is een tak van de damsport waarbij een dammer het gelijktijdig opneemt tegen meerdere tegenstanders. De dammer in kwestie ziet de speelborden en tegenstanders niet en speelt dus alle partijen uit zijn hoofd. Deze opgave gaat over deze damsportvariant.

De puntentelling bij dammen is als volgt: de winnaar krijgt 2 punten, de verliezer 0. Bij gelijkspel (dat wordt remise genoemd) krijgen beide spelers 1 punt.
Een dammer die het wereldrecord blindsimultaandammen wil verbreken, moet tegen meer tegenstanders spelen dan de zittende wereldrecordhouder. Bovendien moet hij minstens 70% van het maximaal te behalen aantal punten scoren.

In 1950 scoorde de Nederlandse dammer Piet Roozenburg tegen in totaal 5 tegenstanders precies 70%. Met deze score werd hij toen recordhouder.

3p **1** Onderzoek op welke manieren deze partijen van Piet Roozenburg verdeeld kunnen zijn in aantallen keren winst, verlies en remise.

Bij een latere recordpoging in 2014 speelde de Nederlandse dammer Ton Sijbrands tegen 32 dammers. Hij won 14 partijen en verloor er geen. Een sportjournalist beweerde: “Gelukkig heeft hij geen wedstrijd verloren, want anders had hij geen 70%-score gehaald”.

3p **2** Onderzoek of deze bewering juist is.

Sinds 1982 heeft Ton Sijbrands het wereldrecord behoorlijk stevig in handen. De tabel geeft een overzicht van zijn wereldrecords.

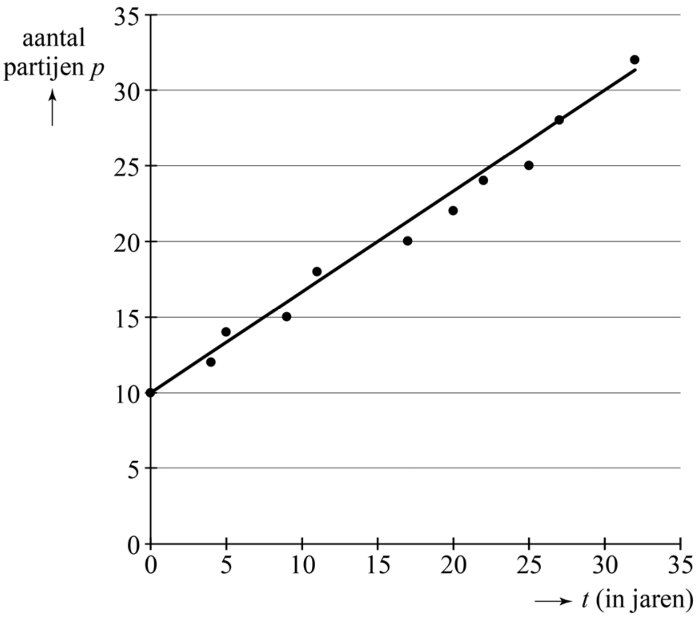
tabel

jaar	partijen	winst	remise	verlies	score(%)
1982	10	9	1	0	95,00
1986	12	11	1	0	95,83
1987	14	12	1	1	89,29
1991	15	13	2	0	93,33
1993	18	14	4	0	88,89
1999	20	17	3	0	92,50
2002	22	17	5	0	88,64
2004	24	20	4	0	91,67
2007	25	21	4	0	92,00
2009	28	18	7	3	76,79
2014	32	14	18	0	71,88

In de rest van deze opgave bekijken we deze ontwikkeling nader.
We letten daarbij eerst op het verloop van het aantal partijen p in de tijd.
We noteren de tijd t in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 1982.

Hiermee maken we figuur 1.

figuur 1

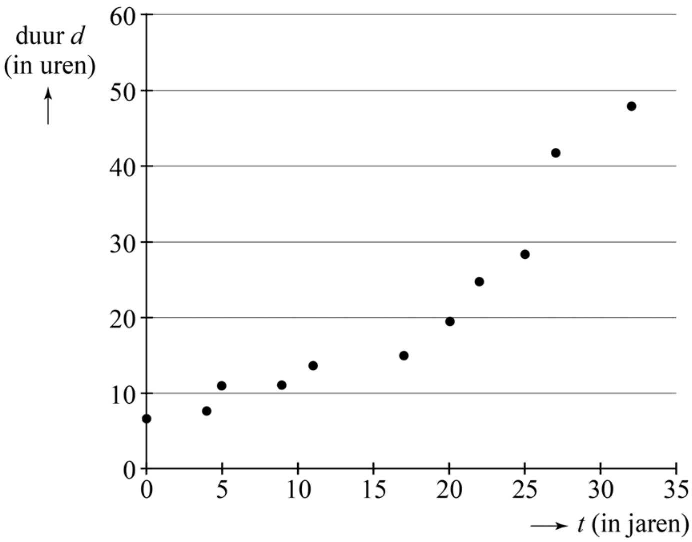


De punten in figuur 1 liggen bij benadering op een lijn. Deze lijn is in figuur 1 ook getekend. De lijn suggereert dat Sijbrands in de toekomst een record van 38 partijen kan behalen.

4p 3 Bereken in welk jaar dit, uitgaande van deze lijn, het geval zou zijn.

Vervolgens kijken we naar de duur van de recordpogingen. In figuur 2 is deze duur d in uren uitgezet tegen de tijd t in jaren. Ook hier komt $t = 0$ overeen met het jaar 1982.

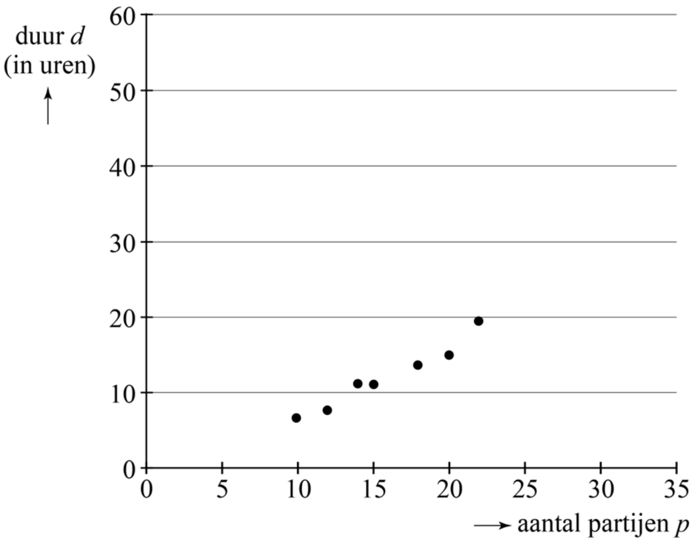
figuur 2



In figuur 2 kun je onder andere aflezen dat de duur van de recordpoging van Sijbrands in 1987 en 1991 ongeveer 11 uur was en in 2014 ongeveer 48 uur.

We noemen figuur 1 een p-t-diagram en figuur 2 een d-t-diagram. Door deze figuren te combineren, kunnen we een d-p-diagram maken. In figuur 3 is hiermee een begin gemaakt. Figuur 3 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 3



4p **4** Maak het d-p-diagram op de uitwerkbijlage af.

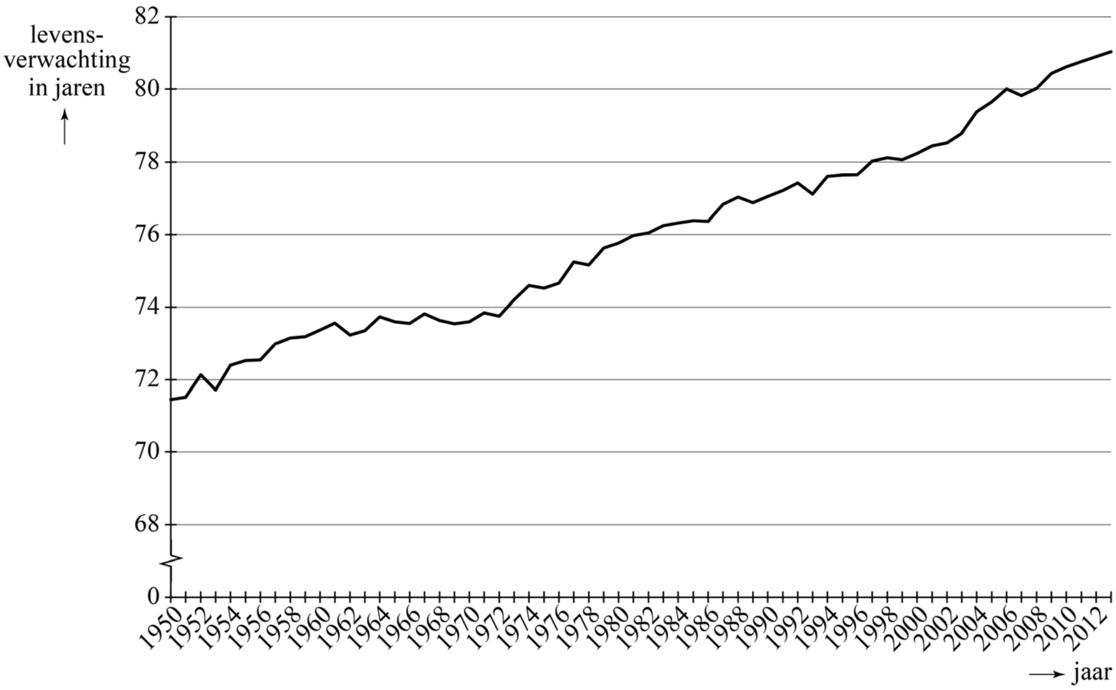
Ga verder op de volgende pagina.

Levensverwachting

De **levensverwachting** is het aantal jaren dat mensen naar verwachting gemiddeld zullen leven vanaf hun geboorte. In 2013 was de levensverwachting in Nederland 81,04 jaar. Dat betekent dus dat mensen die in 2013 in Nederland geboren zijn, gemiddeld 81 jaar en 15 dagen oud zullen worden.

In Nederland stijgt de levensverwachting al geruime tijd. In figuur 1 is de ontwikkeling van de levensverwachting in Nederland sinds 1950 weergegeven. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1



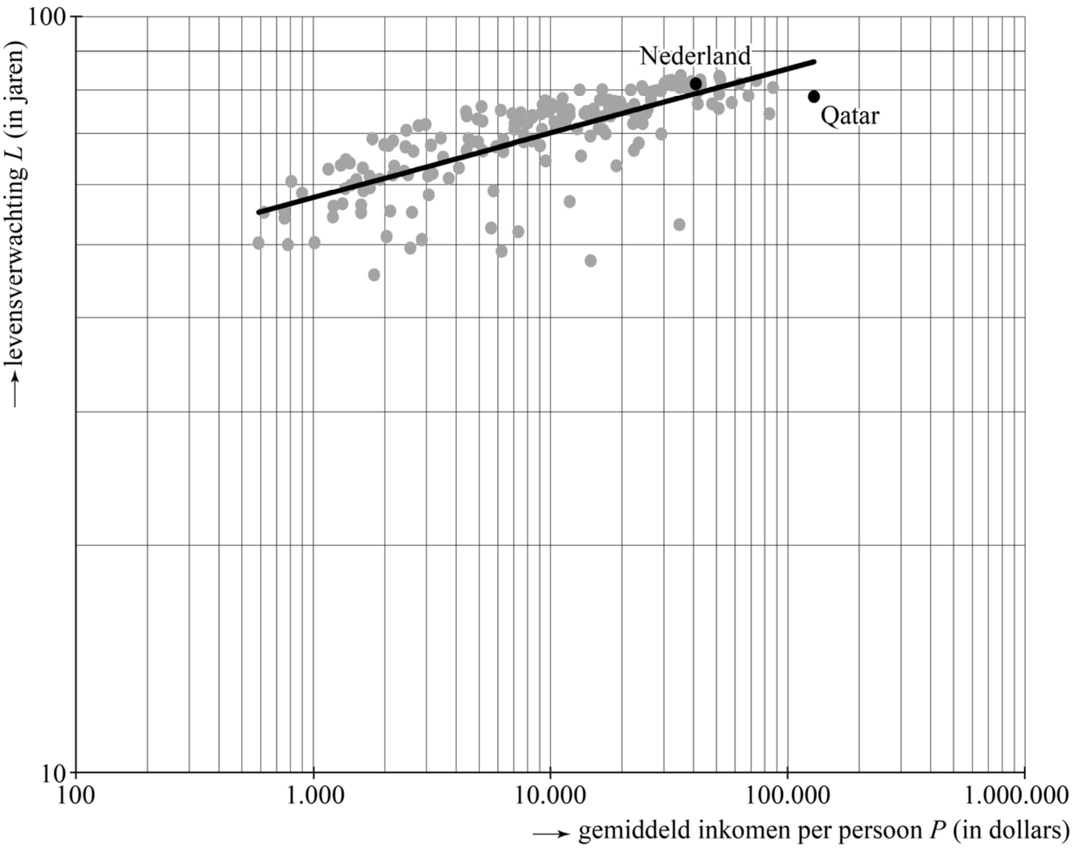
In figuur 1 is te zien dat de levensverwachting vrijwel lineair stijgt.

Volgens een recente schatting zal in 2099 de levensverwachting van Nederlanders 90,78 jaar zijn.

4p **5** Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage of deze schatting overeenkomt met een schatting die uitgaat van een lineaire toename van de levensverwachting.

Uit onderzoek is bekend dat mensen met een hoog inkomen gemiddeld langer leven dan mensen met een laag inkomen. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de levensverwachting in landen met een hoog gemiddeld inkomen per persoon doorgaans hoger is dan in landen met een laag gemiddeld inkomen per persoon. In figuur 2 is voor een groot aantal landen de levensverwachting uitgezet tegen het gemiddelde inkomen per persoon. Hierbij stelt iedere stip een land voor. Op de horizontale as staat het gemiddelde inkomen per persoon P (in dollars) en op de verticale as de levensverwachting L (in jaren). Alle gegevens gaan over 2012.

figuur 2



In figuur 2 heeft zowel de horizontale als de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Ook is er een trendlijn toegevoegd die het verband tussen gemiddeld inkomen per persoon en levensverwachting benadert.

Met een gemiddeld inkomen per persoon van \$128 722 is Qatar het land met het hoogste gemiddelde inkomen per persoon ter wereld. Toch was de levensverwachting daar in 2012 lager dan je volgens de trendlijn mag verwachten.

3p **6** Bereken met behulp van schattingen in de grafiek hoeveel procent lager dit is. Geef je antwoord als een geheel getal.

De trendlijn in figuur 2 is een rechte lijn, dus er bestaat een lineair verband tussen $\log(L)$ en $\log(P)$. Dit verband ziet er als volgt uit:

$$\log(L) = 0,084 \cdot \log(P) + 1,509$$

Je kunt deze formule ook schrijven als een machtsverband. Dat verband ziet er dan als volgt uit:

$$L = 32,28 \cdot P^{0,084}$$

4p **7** Laat zien hoe de tweede formule uit de eerste formule is af te leiden.

In figuur 2 is duidelijk te zien dat wanneer het gemiddelde inkomen per persoon stijgt, de levensverwachting volgens de trendlijn dat ook doet. Door de logaritmische schaal is echter niet te zien of dit een toenemende of een afnemende stijging is.

4p **8** Onderzoek met behulp van de afgeleide van L of er sprake is van toenemende of afnemende stijging.

Formule van Camp

Voor een winkelier zijn zowel aan het bestellen van producten als aan het in voorraad houden van producten kosten verbonden. Daarom doen economen onderzoek naar een juiste balans tussen het aantal bestellingen per jaar en het aantal producten per bestelling.

Veronderstel dat een winkelier jaarlijks 100 stuks van een bepaald product verkoopt. Hij wil dat er per jaar in totaal 100 exemplaren besteld worden in n even grote bestellingen, bijvoorbeeld 4 bestellingen van elk 25 stuks.

2p **9** Bepaal welke andere aantallen bestellingen in deze situatie mogelijk zijn.

Bij een veel gebruikt algemeen model nemen economen aan dat de winkelier voor elke bestelling en voor elk in voorraad gehouden product een vast bedrag rekent. De formule bij dit model is:

$$K = \frac{A \cdot B}{n} + \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot V \qquad (1)$$

Hierin is:
- K de totale jaarlijkse kosten in euro's;
- A het aantal producten dat jaarlijks besteld wordt;
- B de bestelkosten per bestelling in euro's;
- n het aantal producten per bestelling;
- V de voorraadkosten per product per jaar in euro's.

Voor een bepaald product hanteert een winkelier € 8,- bestelkosten per bestelling. De voorraadkosten zijn € 0,60 per product per jaar. Per jaar verkoopt de winkelier 1000 stuks van dit product en hij wil dus ook dat er 1000 producten per jaar besteld worden.
De winkelier wil dat de totale jaarlijkse kosten maximaal € 110,- zijn.

5p **10** Bereken welk aantal bestellingen per jaar **minimaal** mogelijk is.

In het vervolg van deze opgave gaan we uit van het algemene model waarbij we **geen** rekening meer houden met het feit dat n eigenlijk een geheel getal moet zijn. Dat n positief moet zijn, blijft wel een eis.

De **optimale bestelgrootte** is het aantal producten per bestelling waarbij de totale jaarlijkse kosten minimaal zijn.

In formule (1) zijn A, B en V getallen die bij een bepaald product bekend zijn. Daarom kan de optimale bestelgrootte worden berekend door de vergelijking $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}n} = 0$ op te lossen.
Hieruit volgt de zogeheten formule van Camp:

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot B}{V}} \qquad (2)$$

Met deze formule van Camp kun je de optimale bestelgrootte direct berekenen als je A, B en V weet.

4p **11** Laat zien dat de formule van Camp inderdaad volgt uit $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}n} = 0$.

Door formule (2) en formule (1) te combineren, kan een uitdrukking gevonden worden voor de minimale kosten. Er blijkt dat deze minimale kosten evenredig zijn met de wortel uit $A \cdot B \cdot V$.
Er geldt dus:

$$K_{\min} = c \cdot \sqrt{A \cdot B \cdot V} \qquad (3)$$

Hierin is c de evenredigheidsconstante.

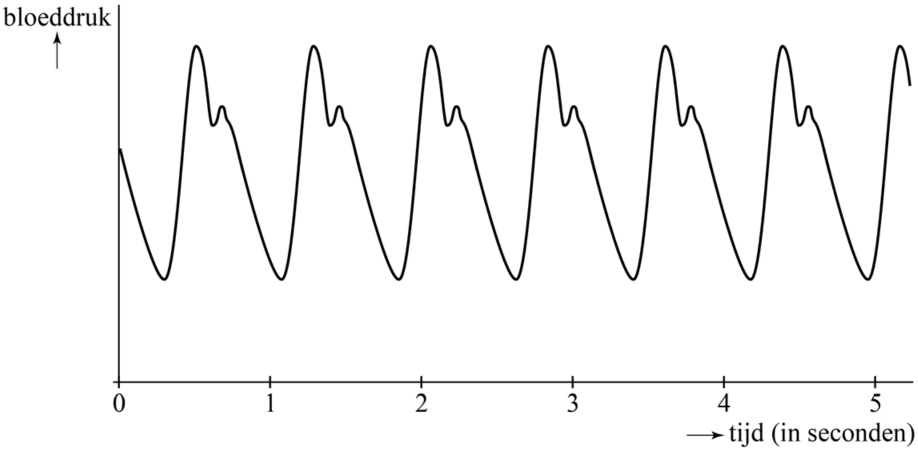
De waarde van c kan onder andere berekend worden door de waarden $A = 1000$, $B = 8$ en $V = 0{,}60$ (zie eerder in deze opgave) te gebruiken. Die waarden moeten dan zowel in formule (3) als in formule (2) ingevuld worden. Daarna kan met deze resultaten en gebruikmakend van formule (1) de waarde van c berekend worden.

5p **12** Bereken de waarde van c. Geef je antwoord in twee decimalen.

Bloeddruk

Het hart pompt bloed door het menselijk lichaam. Als het hart samentrekt, wordt bloed in de bloedvaten gepompt, met als gevolg dat deze onder druk komen te staan. Als het hart zich weer ontspant, neemt de druk in de bloedvaten weer af.
Dit proces herhaalt zich voortdurend en het aantal keren per minuut dat dit gebeurt, noemen we de **hartslag**. Tijdens dit proces neemt de druk in de bloedvaten dus steeds toe en weer af. De hoogste druk wordt de **bovendruk** genoemd en de laagste druk noemt men de **onderdruk**. Van een bepaalde persoon is in figuur 1 de bloeddruk uitgezet tegen de tijd.

figuur 1



2p **13** Bepaal met behulp van figuur 1 de hartslag van deze persoon.

Als model van de bloeddruk wordt vaak een sinusoïde van de vorm $P = a + b\sin(c \cdot t)$ gebruikt. Hierin is P de bloeddruk, t de tijd in seconden en zijn a, b en c constanten. Deze constanten zijn afhankelijk van de hartslag en worden zo gekozen dat maximum en minimum van de sinusoïde overeenkomen met bovendruk en onderdruk.

Een tweede persoon heeft een hartslag van 66 slagen per minuut. Zijn bovendruk is 124 en zijn onderdruk is 82.

4p **14** Stel een formule voor P op van de bloeddruk van deze persoon, horend bij het model van de sinusoïde.

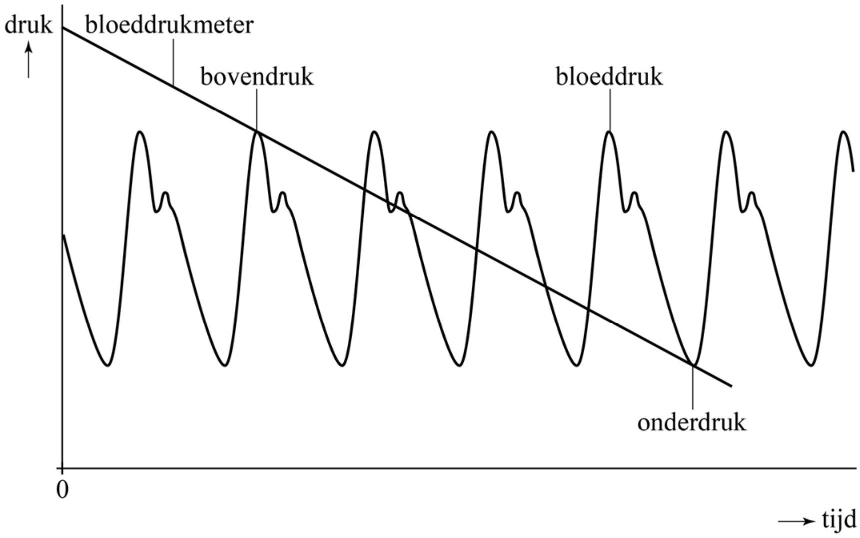
De eenheid van bloeddruk is ‘millimeter kwikdruk’, afgekort mmHg. Een modernere maat voor bloeddruk is kilopascal (kPa). Het is vrij eenvoudig om mmHg om te rekenen naar kPa. Daarvoor gebruiken we dat het verband tussen kPa en mmHg recht evenredig is en dat de gemiddelde luchtdruk op aarde gelijk is aan 760 mmHg, maar ook gelijk is aan 101,325 kPa.

3p **15** Stel een formule op voor het verband tussen K, de bloeddruk in kilopascal en H, de bloeddruk in mmHg. Rond daarbij zonodig af op twee decimalen.

Bloeddruk meten wordt meestal gedaan met de methode van Riva-Rocci, genoemd naar de Italiaanse uitvinder ervan.
Die werkt als volgt: met een opblaasbare band om de bovenarm wordt de polsslagader afgekneld, zodat er geen bloed meer doorheen stroomt. Daarna laat men langzaam de lucht uit de band lopen, totdat er voor het eerst weer een bloedstroming waarneembaar is. De bijbehorende druk is de bovendruk. Daarna laat men de band nog verder leeglopen, totdat de bloedstroming niet meer waarneembaar is. De druk die daarbij hoort is de onderdruk.

In figuur 2 staat een schets die bij deze methode past.

figuur 2



In figuur 2 gaat de lijn van de bloeddrukmeter precies door twee toppen van de bloeddruk. In werkelijkheid is dit meestal niet zo, omdat het verloop van deze lijn afhangt van hoe ver de band opgeblazen wordt en hoe snel deze leegloopt. Daarom is een dergelijke bloeddrukmeting nooit helemaal nauwkeurig. Boven- en onderdruk (of eigenlijk benaderingen daarvan) worden gevonden door te bepalen waar de twee grafieken elkaar voor het eerst en voor het laatst snijden.

Van een patiënt kan de bloeddruk benaderd worden met de formule:

$P = 110 + 23\sin(2\pi t)$ (met P in mmHg en t in seconden)

Bij een bloeddrukmeting volgens de methode van Riva-Rocci pompt een verpleegkundige een bloeddrukmeter op tot een waarde van 170 mmHg. Daarna laat hij, vanaf $t = 0$, de druk gelijkmatig afnemen met 10 mmHg per seconde.

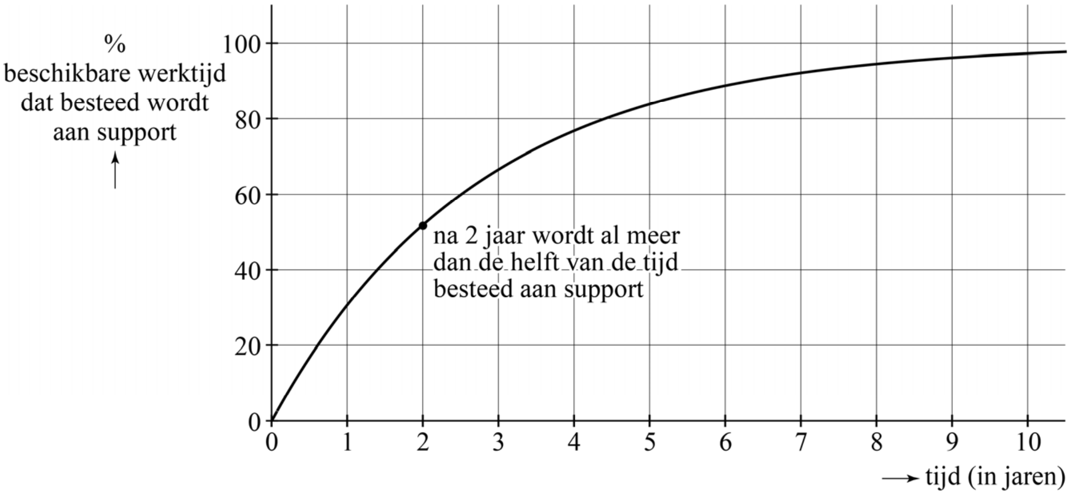
5p **16** Bereken welke bovendruk en onderdruk de verpleegkundige rapporteert. Geef je antwoord in gehele getallen.

Support

Softwarebedrijven maken nieuwe software maar moeten ook aandacht besteden aan het geven van support aan hun klanten. Het geven van deze support kost bij veel softwarebedrijven steeds meer tijd. Als een softwarebedrijf vervolgens geen nieuw personeel wil aannemen, gaat de toenemende tijd die besteed wordt aan support ten koste van de tijd voor het ontwikkelen van nieuwe software.

Bij softwarebedrijf X-tent-O is geconstateerd dat men, als gevolg van deze toenemende vraag naar support, elke maand 3% minder tijd dan in de maand daarvoor besteedt aan het ontwikkelen van nieuwe software. Zie de figuur.

figuur



Na twee jaar moet al meer dan de helft van de beschikbare werktijd besteed worden aan support. En na vijf jaar kan nog maar 16% van de beschikbare werktijd aan het ontwikkelen van nieuwe software besteed worden.

Als er door de toename van de support elke **maand** 3% minder tijd besteed kan worden aan het ontwikkelen van nieuwe software dan in de maand daarvoor, dan kun je het percentage werktijd P dat aan support wordt besteed, met de volgende formule berekenen:

$$P = 100 \cdot \left(1 - 0{,}97^{12t}\right)$$

Hierin is t de tijd in jaren vanaf de lancering van de nieuwe software.

Uit de figuur blijkt dus dat na twee jaar meer dan de helft van de tijd aan support wordt besteed en dat er na vijf jaar (ongeveer) 16% van de beschikbare werktijd aan nieuwe software besteed wordt.

3p **17** Bereken met behulp van de formule de procentuele toename van het percentage werktijd dat aan support wordt besteed tussen twee en vijf jaar na de lancering van de nieuwe software. Geef je antwoord in gehele procenten.

Veel beginnende softwarebedrijven houden er binnen een paar jaar mee op, omdat ze zich verkijken op de tijd die in support moet worden gestoken.

3p **18** Bereken met behulp van de formule hoelang het duurt totdat 90% van het percentage werktijd bij X-tent-O aan support wordt besteed. Geef je antwoord in hele maanden.

Met behulp van de afgeleide van P kan de verandering van het percentage dat aan support wordt besteed, worden bepaald. Die afgeleide is van de vorm $P' = k \cdot 0{,}97^{12t}$. Afgerond op één decimaal geldt: $k = 36{,}6$.

5p **19** Bereken k met behulp van differentiëren. Geef je antwoord in twee decimalen.

Het percentage werktijd dat aan support wordt besteed heeft, zoals ook in de figuur te zien is, een grenswaarde (van 100%). Dat percentage stijgt afnemend naar die grenswaarde.

3p **20** Beredeneer aan de hand van de afgeleide van P dat het percentage werktijd dat aan support wordt besteed inderdaad steeds minder sterk toeneemt.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Sjinkie

Begin 2015 werd Sjinkie Knegt in Dordrecht voor de tweede maal in zijn carrière Europees kampioen shorttrack. Zo'n kampioenschap bestaat uit het schaatsen van de vier afstanden 500 m, 1000 m, 1500 m en 3000 m. Per afstand kun je punten verdienen. Degene met de meeste punten na vier afstanden is de winnaar.
De beste acht deelnemers per afstand krijgen punten volgens de onderstaande tabel:

plaats	punten
1	34
2	21
3	13
4	8

plaats	punten
5	5
6	3
7	2
8	1

Deelnemers die op plaats 9 of lager eindigen, krijgen voor die afstand geen punten.

In werkelijkheid kunnen er op sommige afstanden extra punten worden behaald in tussensprints. Deze laten we voor deze opgave buiten beschouwing.

Tijdens het toernooi werd Sjinkie eerste op de 500 meter en op de 1000 meter, tweede op de 1500 meter en vierde op de 3000 meter. Hij behaalde daarmee $34+34+21+8=97$ punten.

Sjinkie's classificering is niet de enige manier om 97 punten te behalen. Hij had bijvoorbeeld ook eerste kunnen worden op de 500 en op de 1500 meter, tweede op de 3000 meter en vierde op de 1000 meter.

Je kunt, na een toernooi met vier afstanden, ook eindigen met een totaal van 55 punten. Dan ben je waarschijnlijk geen kampioen, maar dan heb je misschien wel een keer een afstand gewonnen en een keer een tweede plaats gehaald. Het aantal van 55 punten is echter op veel meer manieren te behalen.

8p **21** Onderzoek op hoeveel manieren je op de vier afstanden een totaal van 55 punten kunt behalen.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.