Examen HAVO

2016

tijdvak 2
donderdag 23 juni
13:30 - 16:30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

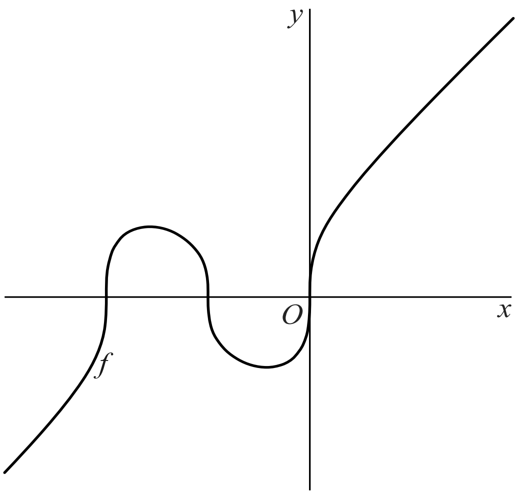
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Drie snijpunten

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x}$. De grafiek van f snijdt de x-as in drie punten. Zie de figuur.

figuur



2p **1** Bereken de x-coördinaten van de drie snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

Verder is gegeven de horizontale lijn l met vergelijking $y = p$. De grafiek van f snijdt l in drie punten.

4p **2** Bereken voor welke waarden van p dit het geval is. Rond de getallen in je antwoord af op drie decimalen.

Zuinig verpakken

Chocolademelk wordt vaak verpakt in karton. Op foto’s 1 en 2 zie je twee verschillende kartonnen verpakkingen: een voordeelpak en een klein pakje.

foto 1

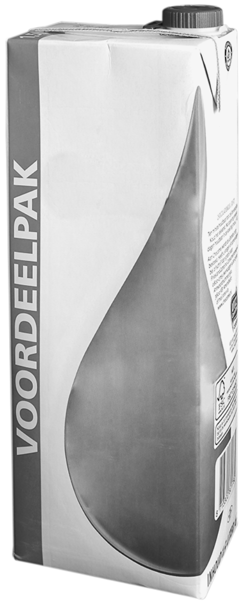


foto 2

Deze twee verpakkingen hebben de vorm van een balk. Het voordeelpak heeft een inhoud van 1,50 liter. De hoogte van dit pak is 24,5 cm. Het kleine pakje heeft een inhoud van 0,20 liter. De afmetingen van dit kleine pakje zijn 4,8 bij 3,5 bij 12,0 cm.
De dikte van het karton, de naden en ook de sluitingen van de pakken worden in deze opgave verwaarloosd.

Het voordeelpak is géén vergroting van het kleine pakje.

4p **3** Toon dit aan.

Chocolademelk wordt ook in blikjes met een inhoud van 0,25 liter verpakt. Zie foto 3.
Zo´n blikje heeft bij benadering de vorm van een cilinder. De hoogte van deze cilinder is 12,8 cm en de diameter van het grondvlak is 5,0 cm.
De dikte van het materiaal, de naden, de sluiting en de holle bodem worden hierbij verwaarloosd.

foto 3

Bij het bepalen van de vorm van een verpakking wil men de hoeveelheid verpakkingsmateriaal zo klein mogelijk houden. Om te onderzoeken of men zuinig geweest is met de hoeveelheid materiaal, kan gebruik worden gemaakt van het **isoperimetrisch quotiënt (*IQ*)**.

De formule voor het isoperimetrisch quotiënt luidt: $IQ = \dfrac{36\pi \cdot V^2}{A^3}$

Hierin is V de inhoud van de verpakking in cm^3 en A de oppervlakte van de verpakking in cm^2.

Hoe groter het IQ, hoe efficiënter (zuiniger) de verpakking.

4p **4** Bereken welke verpakking het meest efficiënt is, het kleine pakje of het blikje.

Het IQ geldt niet alleen voor verpakkingen, maar kan voor alle lichamen berekend worden.

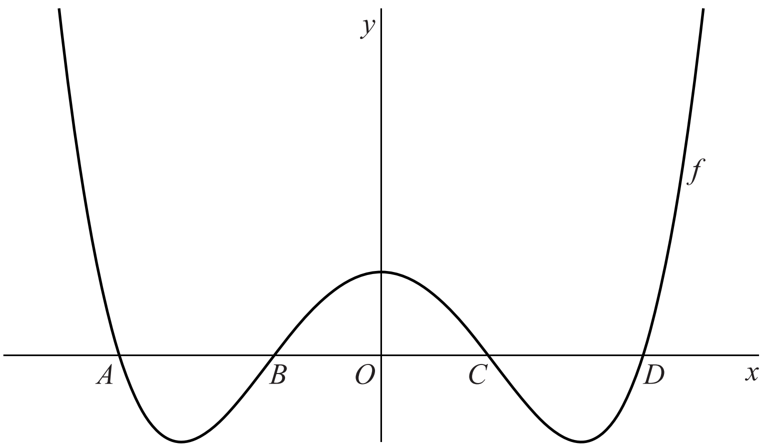
Een bol is een bijzonder lichaam, want een bol blijkt het hoogste IQ te hebben.
Het IQ van een lichaam hangt alleen maar af van de vorm van dat lichaam en niet van de grootte ervan. Daarom is de waarde van het IQ voor alle bollen gelijk.

4p **5** Bereken exact het IQ van een bol.

Vierdegraadsfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \left(x^2 - 7\right)^2 - 25$. De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in de punten A, B, C en D. Zie de figuur.

figuur



Lijnstuk AD is langer dan lijnstuk BC.

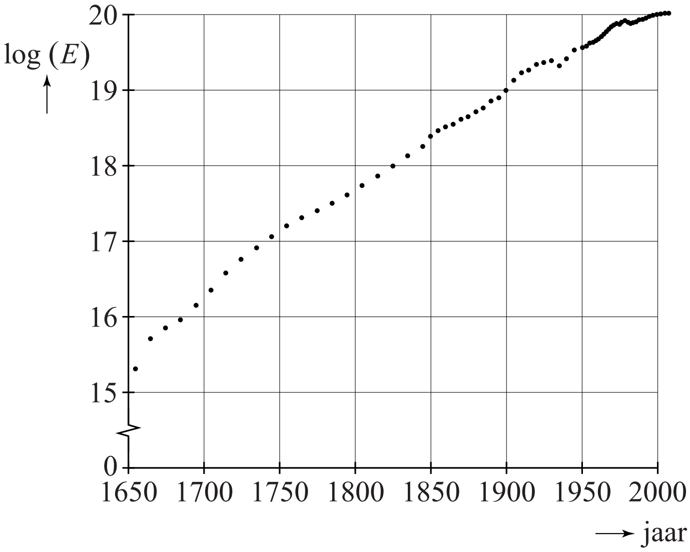
6p **6** Bereken exact hoeveel keer zo lang.

7p **7** Bepaal op exacte wijze het bereik van f.

Energieverbruik

Sinds het begin van de industriële revolutie is het totale jaarlijkse energieverbruik in de Verenigde Staten (VS) nagenoeg exponentieel toegenomen.
E is het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar. In figuur 1 is voor een aantal jaren $\log(E)$ aangegeven. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1

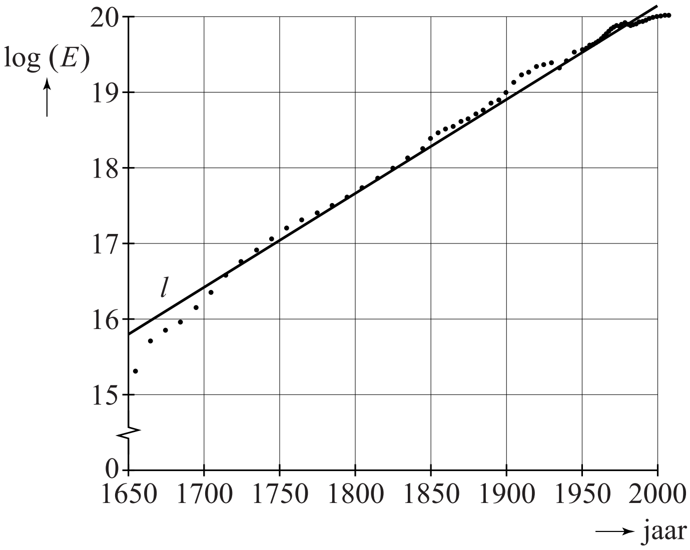


1 exajoule is gelijk aan 10^{18} joule.

4p **8** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage het totale energieverbruik in de VS in het jaar 1950 in hele exajoules nauwkeurig. Licht je antwoord toe.

De punten in figuur 1 liggen bij benadering op een rechte lijn. Deze lijn l is in figuur 2 getekend.

figuur 2



Een formule voor lijn l is:

$$\log(E) = 0{,}0125t + 15{,}8$$

Hierin is E het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar en t het aantal jaren met $t = 0$ voor het jaar 1650.

3p **9** Bereken in welk jaar volgens de formule in de VS voor het eerst meer dan $3{,}0 \cdot 10^{20}$ joule aan energie zal worden verbruikt.

Een onderzoeker voorspelt dat het wereldwijde energieverbruik na 2010 exponentieel groeit, waarbij het elke honderd jaar tien keer zo hoog wordt.

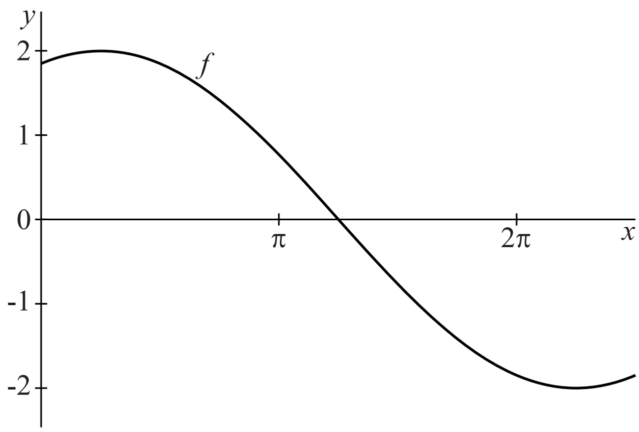
Op 1 januari 2010 was het wereldwijde energieverbruik $1{,}2 \cdot 10^{13}$ joule per seconde. De aarde ontvangt van de zon veel meer energie, maar liefst $1{,}7 \cdot 10^{17}$ joule per seconde. Als alle energie die de aarde van de zon ontvangt door de mens gebruikt zou kunnen worden, dan zouden we nu theoretisch gezien alleen met zonne-energie kunnen volstaan. Volgens bovengenoemde voorspelling zullen we in de toekomst op een gegeven moment toch meer energie verbruiken dan de aarde van de zon ontvangt.

4p **10** Bereken over hoeveel eeuwen dit volgens deze voorspelling het geval zal zijn.

Sinusoïden

Op het domein $\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi\right)$. Zie figuur 1.

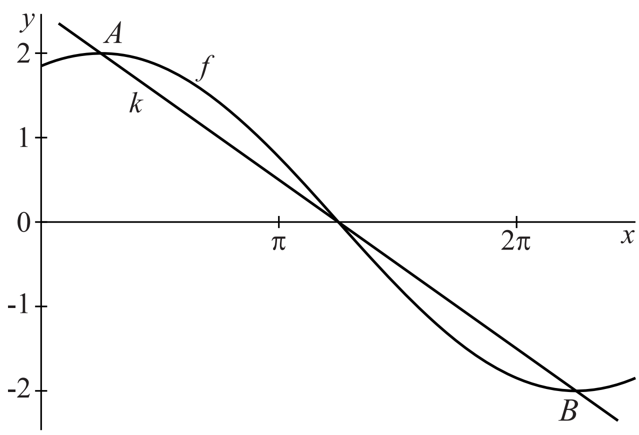
figuur 1



3p **11** Bereken exact de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f. Lijn k gaat door A en B. Zie figuur 2.

figuur 2



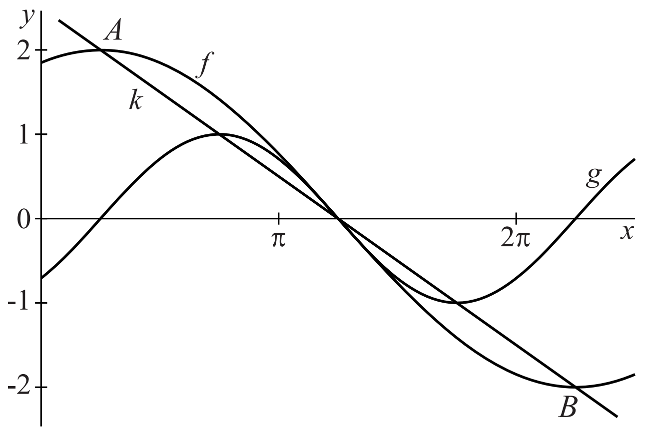
De coördinaten van A en B zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, 2\right)$ en $\left(\frac{9}{4}\pi, -2\right)$.

Een vergelijking voor k is $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}$.

2p **12** Toon aan dat deze vergelijking voor k met behulp van de coördinaten van A en B opgesteld kan worden.

Op hetzelfde domein is de functie g gegeven door $g(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.
De toppen van de grafiek van g liggen ook op k. Zie figuur 3.

figuur 3

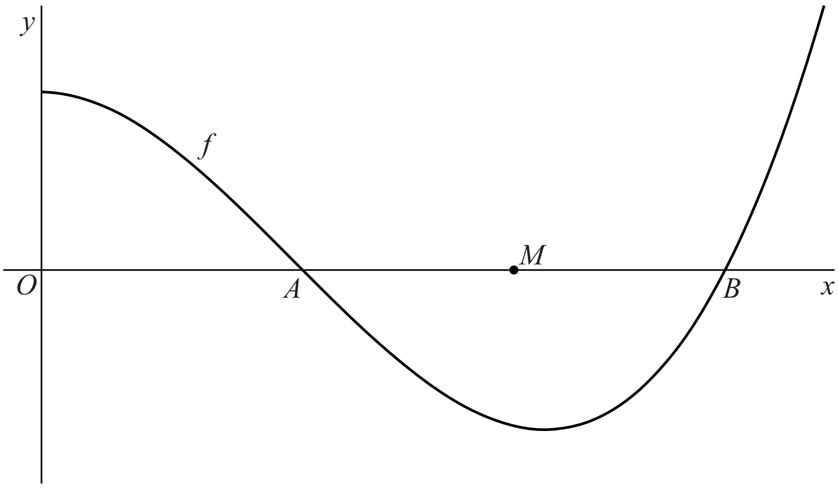


5p **13** Toon dit met exacte berekening aan.

Het midden en de top

De functie f is gegeven door $f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 5)$. De grafiek van f snijdt de positieve x-as in de punten A en B. Het punt M is het midden van lijnstuk AB. Zie figuur 1.

figuur 1

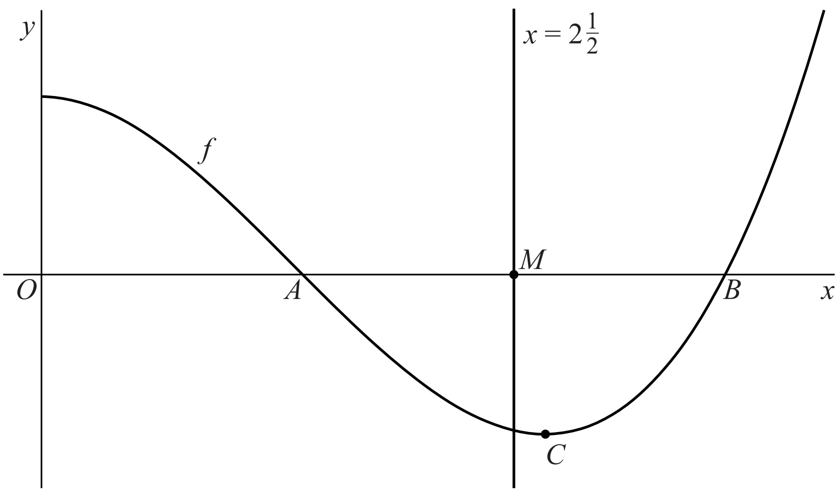


De x-coördinaat van M is gelijk aan $2\frac{1}{2}$.

4p **14** Toon dit met exacte berekening aan.

Het punt C is een top van de grafiek van f. De verticale lijn door M gaat niet door C. Zie figuur 2.

figuur 2



6p **15** Bereken exact het verschil tussen de x-coördinaten van M en C.

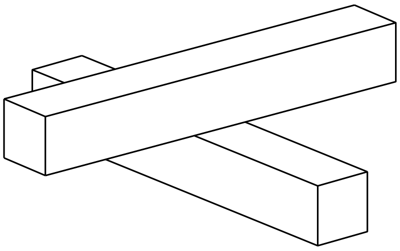
Het Gebouw

In Leidsche Rijn staat Het Gebouw, een bouwwerk naar een idee van kunstenaar Stanley Brouwn. Zie foto 1.

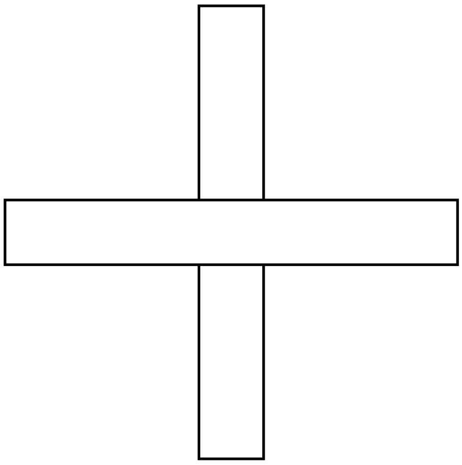
foto 1

De vorm van Het Gebouw wordt bepaald door twee op elkaar liggende balken. Elke balk heeft een lengte van 27,30 meter, een breedte van 3,90 meter en een hoogte van 3,90 meter. De onderste balk rust op de grond. De balken liggen in het midden op elkaar onder een hoek van 90º. In figuur 1 is een model van Het Gebouw getekend. In figuur 2 zie je het bovenaanzicht van dit model.

figuur 1



figuur 2



Een groot deel van deze op elkaar liggende balken van Het Gebouw komt met de buitenlucht in aanraking.

3p **16** Bereken de oppervlakte van dit deel. Geef je antwoord in hele m^2 nauwkeurig.

In figuur 3 zie je nogmaals het bovenaanzicht van het model van Het Gebouw. Hierin is ook een horizontale kijklijn PQ aangegeven. Deze kijklijn maakt in het bovenaanzicht een hoek van 45° met de beide balken. Kijkend in de richting van PQ zie je Het Gebouw als in foto 2.

figuur 3

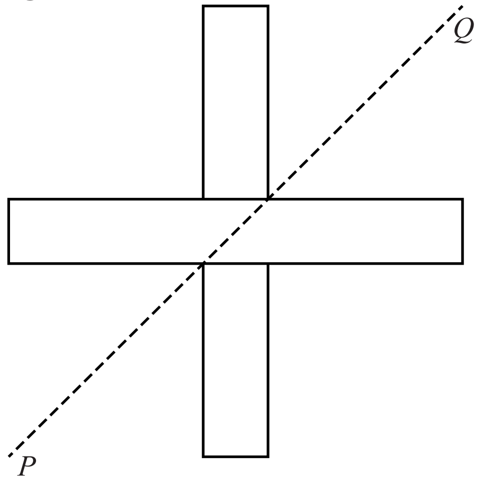


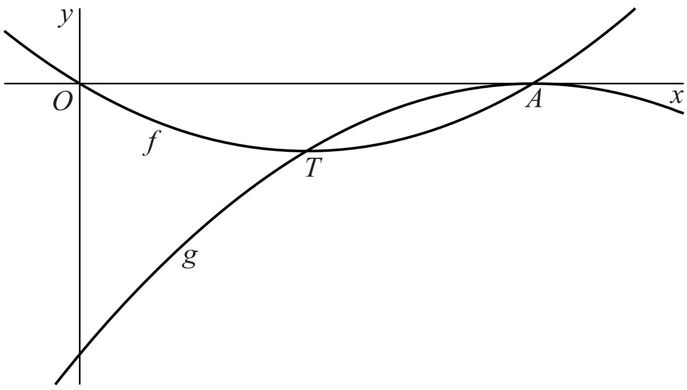
foto 2

6p **17** Teken een aanzicht op schaal 1 : 390 van Het Gebouw (zonder ramen en deuren) in de richting van de kijklijn PQ. Licht je werkwijze toe.

Twee parabolen

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 - 6x$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in het punt A.
De grafiek van de functie g raakt de x-as in A en gaat door de top T van de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.

7p **18** Bereken exact a, b en c.