Examen HAVO

2016

tijdvak 1
maandag 23 mei
13:30 - 16:30 uur

wiskunde B (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

HA-1025-f-16-1-o

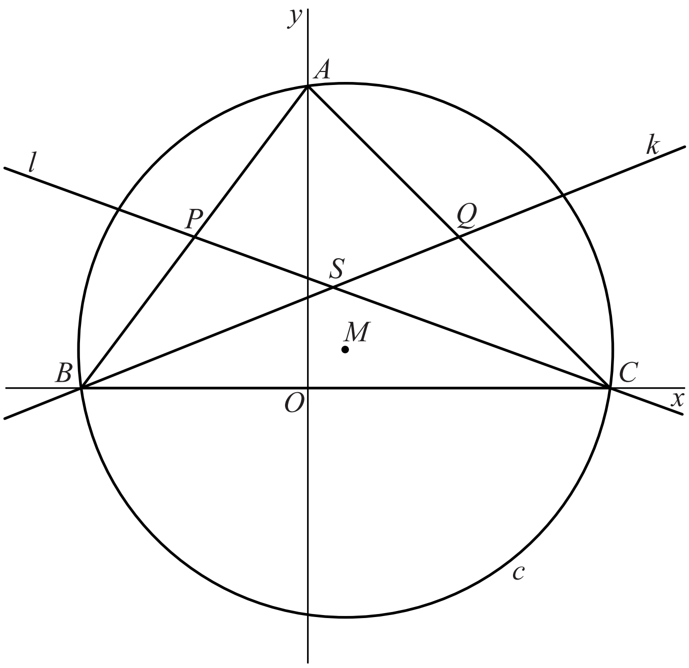
De rechte van Euler

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ die door het punt $A(0, 4)$ gaat.

3p **1** Stel een vergelijking op van c.

De punten $B(-3, 0)$ en $C(4, 0)$ liggen op c.
Punt Q is het midden van lijnstuk AC.
Lijn k is de lijn door B en Q. Een vergelijking van k is $y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.
Punt P is het midden van lijnstuk AB.
Lijn l is de lijn door C en P.
Punt S is het snijpunt van k en l. Zie figuur 1.

figuur 1

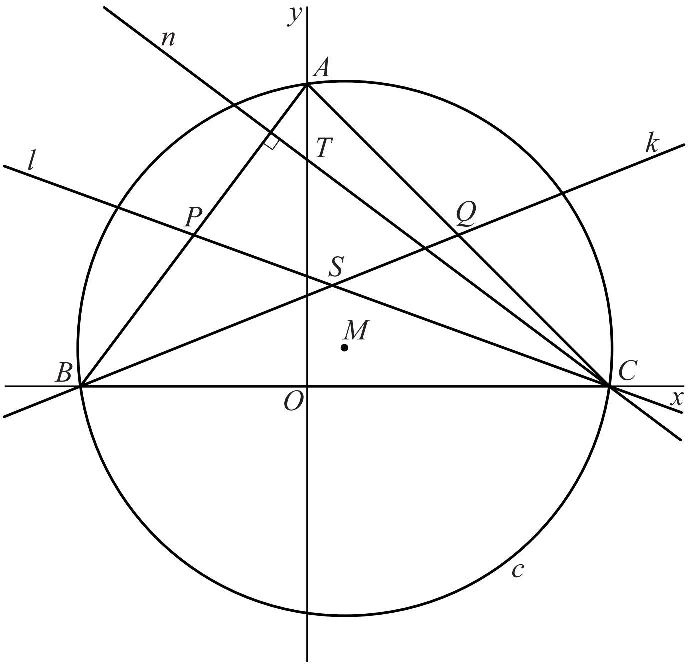


De coördinaten van S zijn $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

5p **2** Bewijs dat de coördinaten van S inderdaad $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ zijn.

Lijn n gaat door C en staat loodrecht op AB.
Bovendien snijdt lijn n de y-as in punt T.
Zie figuur 2.

figuur 2



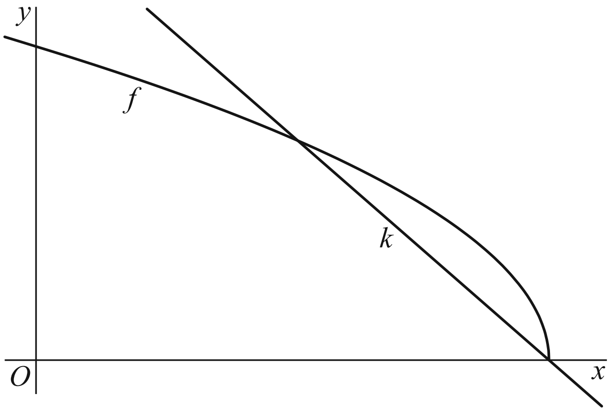
Volgens de achttiende-eeuwse wiskundige Euler liggen de punten M, S en T op één lijn.

7p **3** Bewijs dat M, S en T inderdaad op één lijn liggen.

Een wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{-3x+6}$. Lijn k heeft vergelijking $y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$. In figuur 1 zie je de grafiek van f en lijn k.

figuur 1

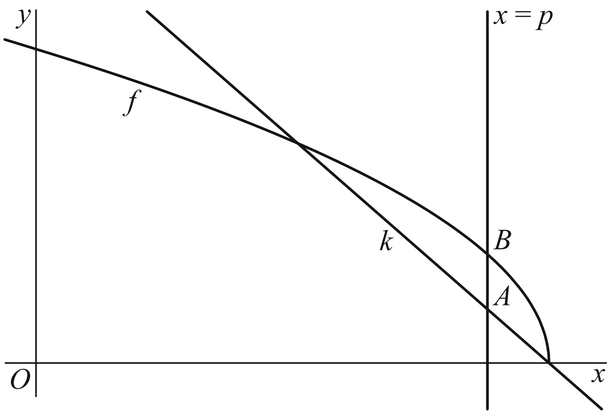


Lijn k en de grafiek van f hebben twee punten gemeenschappelijk.

5p **4** Bereken exact de x-coördinaten van deze twee punten.

De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt k in punt A en de grafiek van f in punt B. De y-coördinaat van B is groter dan de y-coördinaat van A. Zie figuur 2.

figuur 2



Er is een waarde van p waarvoor de afstand tussen A en B maximaal is.

6p **5** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van p.

Schijngestalten van de maan

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$$P = 50 + 50\sin\left(0{,}212769t - 1{,}042563\right)$$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t is de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

3p **6** Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de **schijngestalte** van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn **nieuwe maan**, **eerste kwartier**, **volle maan** en **laatste kwartier**. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

figuur

nieuwe maan	eerste kwartier	volle maan	laatste kwartier	nieuwe maan
0% zichtbaar	50% zichtbaar	100% zichtbaar	50% zichtbaar	0% zichtbaar

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

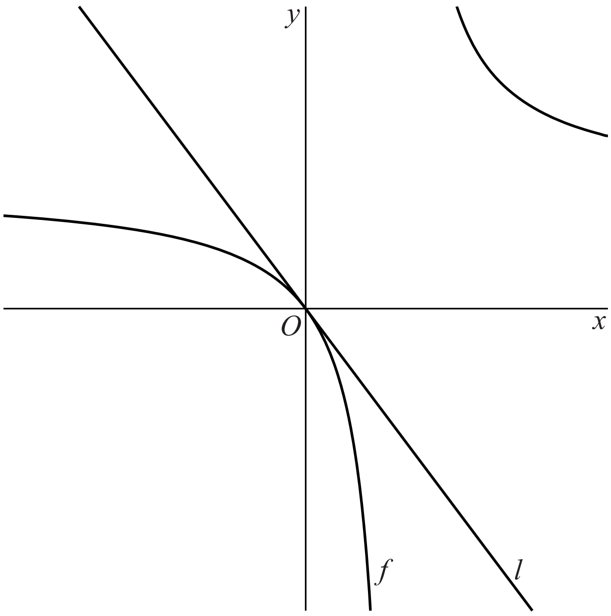
3p **7** Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

4p **8** Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Gebroken functie en raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{12}{x-3} + 4$. Lijn l raakt in de oorsprong aan de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1



De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{4}{3}$.

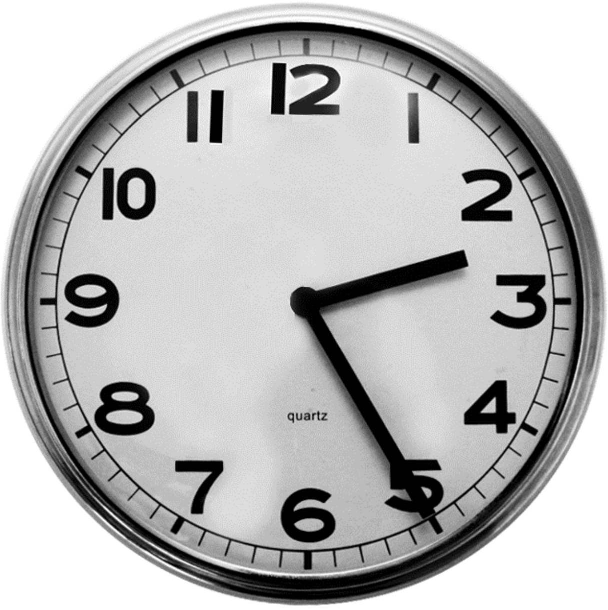
3p **9** Toon met behulp van differentiëren aan dat de richtingscoëfficiënt van l inderdaad $-\frac{4}{3}$ is.

Lijn k staat loodrecht op l en gaat door de oorsprong. k snijdt de grafiek van f in de oorsprong, en ook nog in een ander punt.

6p **10** Bereken exact de coördinaten van dit punt.

Klok

foto



De klok op de foto hierboven heeft een kleine wijzer met een lengte van 8,5 cm en een grote wijzer met een lengte van 12,5 cm. Het uiteinde van de kleine wijzer noemen we A; het uiteinde van de grote wijzer noemen we B.

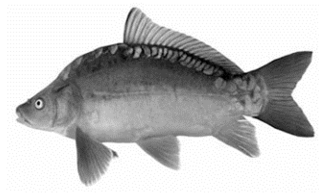
Als het bijvoorbeeld 2:00 uur is, dan wijst de kleine wijzer precies naar 2 en staat de grote wijzer precies op 12.
Is het bijvoorbeeld 2:15 uur (kwart over twee), dan heeft de kleine wijzer precies een kwart van de hoek tussen de 2 en de 3 afgelegd; de grote wijzer staat dan precies op 3.

Op de klok op de foto is het precies 2:25 uur (vijf voor half drie).

7p **11** Bereken in deze situatie de afstand tussen A en B. Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Karpers

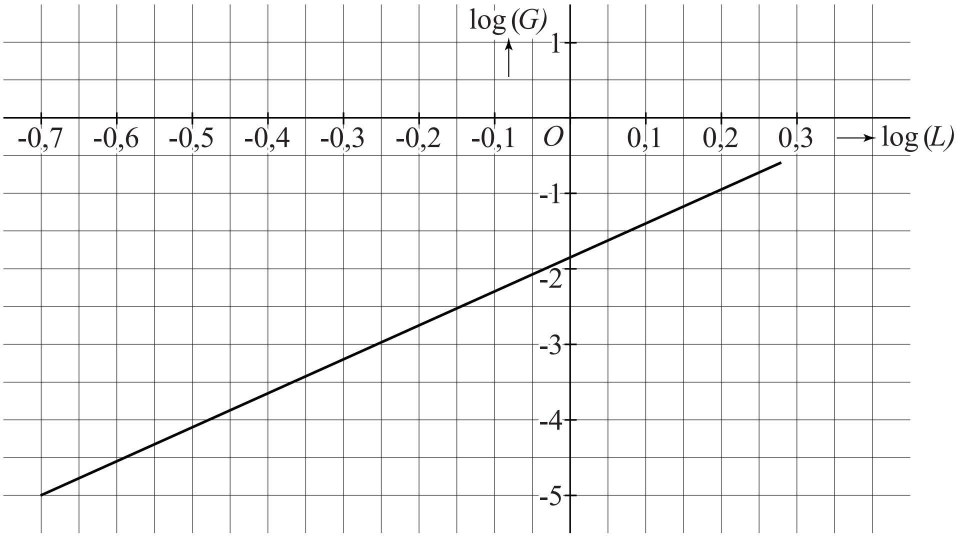
foto



In het begin van hun leven ontwikkelen karpers zich van larve tot klein visje. Aan het einde van deze ontwikkeling heeft het visje een lengte van ongeveer 1,9 cm.

De lengte van de karperlarve in centimeter noemen we L.
Het gewicht van de karperlarve in gram noemen we G.
In de figuur is het verband tussen $\log(L)$ en $\log(G)$ weergegeven.
Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



4p **12** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage het gewicht van een karperlarve met een lengte van 0,8 cm. Geef je antwoord in hele milligrammen nauwkeurig.

Het verband tussen de lengte van karperlarven en hun gewicht kan beschreven worden met een formule van de vorm:

$$G = 0{,}014 \cdot L^b \text{ met } 0{,}2 \le L \le 1{,}9$$

Hierin is L de lengte in centimeter, G het gewicht in gram en b een constante.

Een karperlarve van 1,9 cm weegt ongeveer 0,25 g.
Hieruit volgt dat b afgerond op één decimaal gelijk is aan 4,5.

3p **13** Bereken b met behulp van deze gegevens in twee decimalen nauwkeurig.

De formule $G = 0{,}014 \cdot L^{4{,}5}$ is te herleiden tot een formule van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

4p **14** Bereken de waarden van p en q. Geef beide waarden in één decimaal nauwkeurig.

Voor volwassen karpers (met $10 \le L \le 94$) is G evenredig met $L^{3{,}13}$.
Hierin is L weer de lengte in centimeter en G het gewicht in gram.

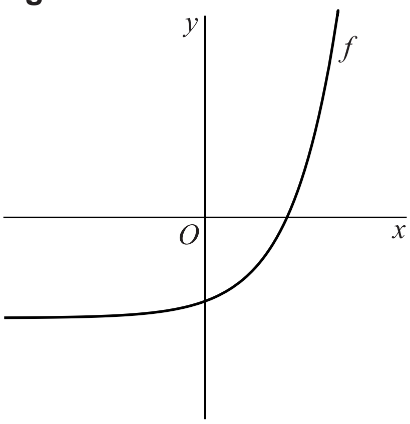
3p **15** Bereken hoeveel keer zo zwaar een volwassen karper van 94 cm is in vergelijking met een volwassen karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Exponentiële functie

De functie f is gegeven door $f(x) = 3^{x-1} - 2$. Zie figuur 1.

figuur 1



3p **16** Bereken exact de waarde van x waarvoor geldt: $f(x) = 241$

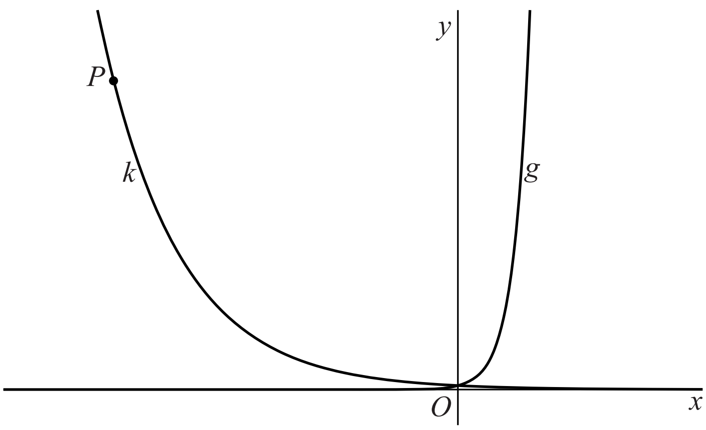
De functie g is gegeven door $g(x) = 3^x$.

Op de grafiek van g worden de volgende transformaties uitgevoerd:
eerst de verschuiving 6 omlaag, gevolgd door de vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de x-as. Op deze manier ontstaat de grafiek van de functie h.

4p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat h dezelfde functie is als f.

De grafiek van g wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as.
Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie k. Het punt $P(-20, 81)$ ligt op de grafiek van k. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **18** Bereken exact de waarde van a.