Examen VWO

2010

tijdvak 2
woensdag 23 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1025-a-10-2-o

Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{t-u}{2}\cos\tfrac{t+u}{2}$$

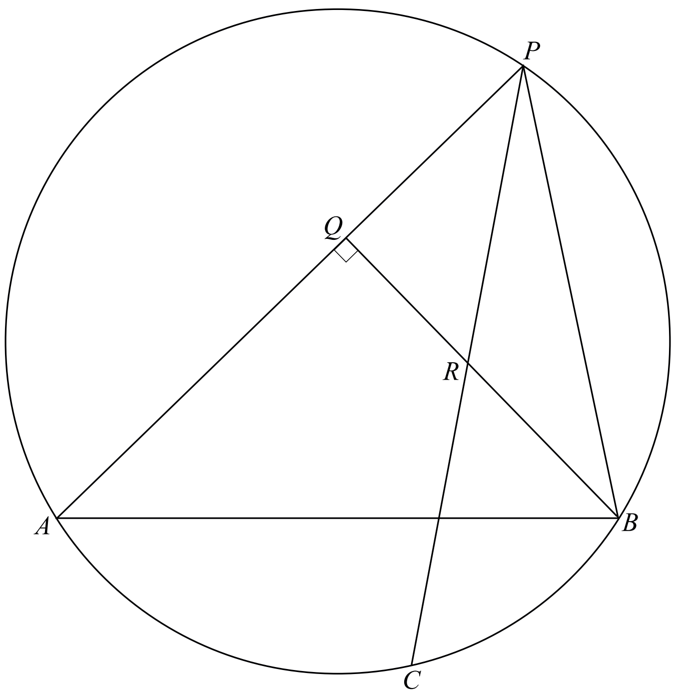
$$\cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$

$$\cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}$$

Snijden met een hoogtelijn

Op een cirkel kiezen we drie vaste punten A, B en C, waarbij lijnstuk AB geen middellijn is en punt C op de kortste cirkelboog AB ligt.
Een punt P doorloopt dat deel van de langste cirkelboog AB waarvoor driehoek ABP niet stomphoekig is.
De hoogtelijn BQ van driehoek ABP snijdt de koorde CP in punt R.
In figuur 1 is een mogelijke positie van P getekend met de bijbehorende punten Q en R. Deze figuur staat ook twee maal op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Bij de beweging van P over het hierboven beschreven deel van de cirkelboog AB verandert de grootte van hoek BRC niet.

4p **1** Bewijs dit.

De baan van R die hoort bij de hierboven beschreven beweging van P, kan getekend worden met behulp van de onder figuur 1 genoemde eigenschap.

5p **2** Teken op deze manier in de figuur op de uitwerkbijlage de baan van R. Geef de randpunten van de baan, waarbij driehoek ABP rechthoekig is, duidelijk aan. Licht je werkwijze toe.

De leercurve

Het aanleren van een nieuwe handeling kost tijd. Als je een handeling vaker uitvoert, wordt de voor deze handeling benodigde tijd meestal steeds korter. T.P. Wright stelde voor dit leerproces de volgende formule op: $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$.

Hierin is:
T_n het aantal seconden dat nodig is als de handeling voor de n-de keer wordt uitgevoerd,
T_1 het aantal seconden dat nodig is als de handeling voor de eerste keer wordt uitgevoerd en
a een positieve constante die afhangt van de snelheid van het leerproces.

Volgens de formule van Wright leidt een verdubbeling van het aantal keer uitvoeren van een zelfde handeling tot een daling van de hoeveelheid benodigde tijd (en dus kosten) van de laatste keer met een vast percentage.
Men spreekt van een $P\%$-leercurve als bij verdubbeling van het aantal keer uitvoeren van n naar $2n$ de laatste keer nog maar $P\%$ kost van de tijd bij de n-de keer. Ofwel: $\frac{T_{2n}}{T_n} = \frac{P}{100}$.

4p **3** Bereken de waarde van a in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

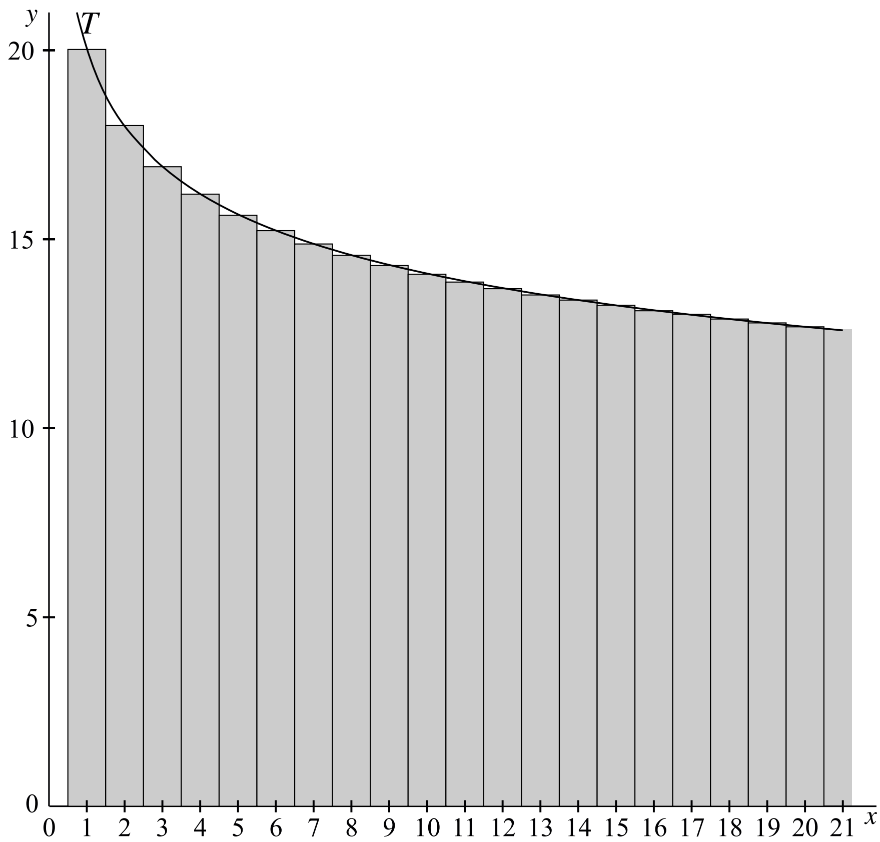
In een bepaald bedrijf voeren mensen een handeling aan de lopende band uit. Deze handeling wordt niet door iedereen op dezelfde manier aangeleerd. In de praktijk komt men onder andere de volgende twee soorten mensen tegen:
- **snelle starters**: deze mensen kunnen de handeling de eerste keer al snel uitvoeren, maar het lukt hen daarna niet om dit snel te verbeteren,
- **snelle leerders**: de eerste keer duurt bij deze mensen wat langer, maar zij zijn in staat snel vooruitgang te boeken.

Voor beide soorten hanteert het bedrijf een formule van Wright:
- snelle starters: $T_n = 20 \cdot n^{-0{,}152}$,
- snelle leerders: $T_n = 40 \cdot n^{-0{,}328}$.

4p **4** Bereken bij de hoeveelste keer uitvoeren een snelle leerder de handeling voor het eerst sneller uitvoert dan een snelle starter.

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes T_1, T_2, T_3, ..., T_{100}. In figuur 1 is een aantal van deze rechthoeken getekend voor een snelle starter.

figuur 1



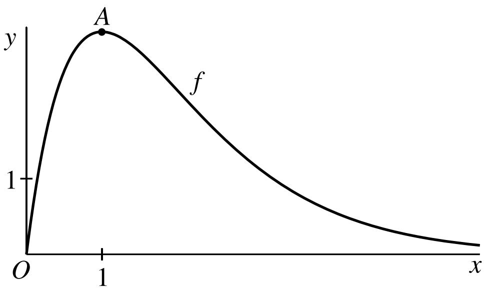
De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x) = 20 \cdot x^{-0,152}$.

4p **5** Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

Een exponentiële functie

In figuur 1 is voor $x \geq 0$ de grafiek getekend van de functie f die gegeven is door $f(x) = \frac{8x}{e^x}$.

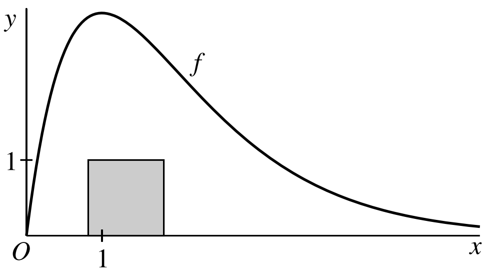
figuur 1



Deze grafiek heeft één top, die we A noemen.

4p **6** Bereken exact de x-coördinaat van A.

figuur 2



Zoals je in figuur 2 ziet, past een vierkant met zijde 1 waarvan één zijde op de x-as ligt, ruimschoots in het gebied tussen de grafiek van f en de x-as.

4p **7** Onderzoek met een berekening of een vierkant met zijde 2 waarvan één zijde op de x-as ligt, ook nog in dit gebied past.

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie g_n die is gegeven door $g_n(x) = \dfrac{8nx}{\mathrm{e}^{nx}}$.

De grafieken van g_n snijden de grafiek van f in het punt (0, 0). Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In tabel 1 staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

tabel 1

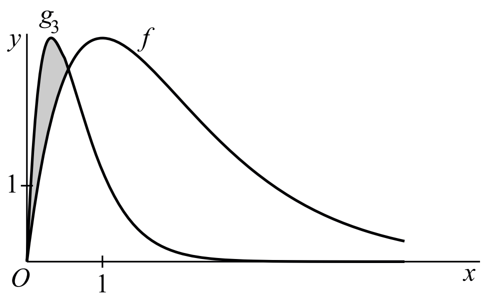
n	2	3	4	5
$x_{snijpunt}$	$\ln 2$	$\frac{1}{2}\ln 3$	$\frac{1}{3}\ln 4$	$\frac{1}{4}\ln 5$

Voor de vier waarden van n uit de tabel geldt: $x_{snijpunt} = \dfrac{1}{n-1}\ln n$.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat deze formule voor $x_{snijpunt}$ klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

5p **8** Toon aan dat dit vermoeden juist is.

figuur 3



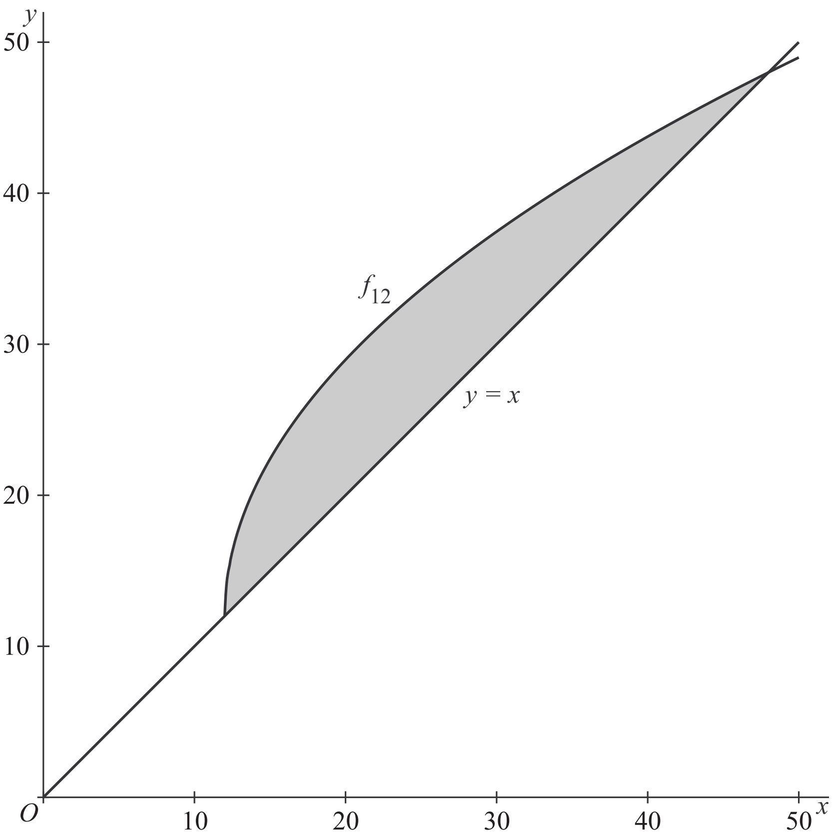
In figuur 3 zijn de grafieken getekend van f en de functie g_3, gegeven door $g_3(x) = \dfrac{24x}{\mathrm{e}^{3x}}$. De grafieken van f en g_3 sluiten een vlakdeel in. Dit vlakdeel is in figuur 3 grijs gemaakt.

4p **9** Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, ...$ is de functie f_n gegeven door $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$. De functie f_{12} is dus gegeven door $f_{12}(x) = 12 + 6\sqrt{x-12}$.
In figuur 1 is de grafiek van f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

figuur 1



8p **10** Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn met vergelijking $y = x$ en de grafiek van f_{12} .

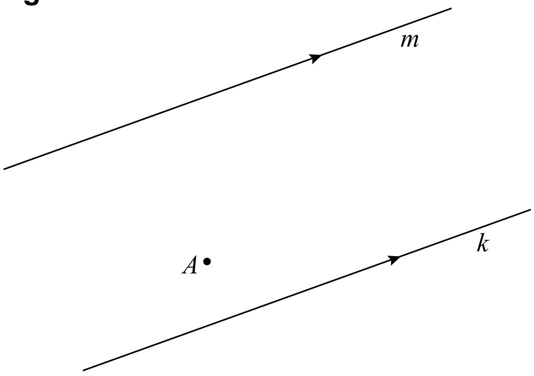
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 9$.

6p **11** Bewijs dat voor elke waarde van n de grafiek van f_n de lijn k raakt in het punt met x-coördinaat $n + 9$.

Zoek de geodriehoek

Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen k en m en een punt A ertussenin. Zie figuur 1.

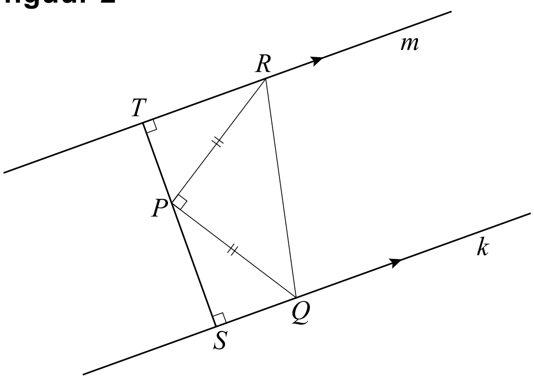
figuur 1



In deze opgave bekijken we hoe je op elk van de twee gegeven lijnen een punt kunt tekenen zo dat deze punten samen met punt A de hoekpunten zijn van een *geodriehoek*. Een *geodriehoek* is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. We bekijken de situatie waarbij de hoek waarvan A het hoekpunt is, recht is.

Om te begrijpen hoe we die situatie kunnen tekenen, bekijken we figuur 2. Hierin is een geodriehoek PQR getekend, waarbij hoek P recht is en de punten Q en R respectievelijk op de (evenwijdige) lijnen k en m liggen. De loodlijn door P op k en m snijdt k in punt S en m in punt T.
Figuur 2 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Er geldt: driehoek PQS is congruent met driehoek RPT.

4p **12** Bewijs dit.

In de figuur op de uitwerkbijlage zijn twee evenwijdige lijnen k en m getekend met een punt A ertussenin.

3p **13** Teken in deze figuur met behulp van wat hierboven over figuur 2 gezegd is een geodriehoek waarvan op elk van deze lijnen k en m een hoekpunt ligt en waarvan A het hoekpunt van de rechte hoek is. Licht je werkwijze toe.

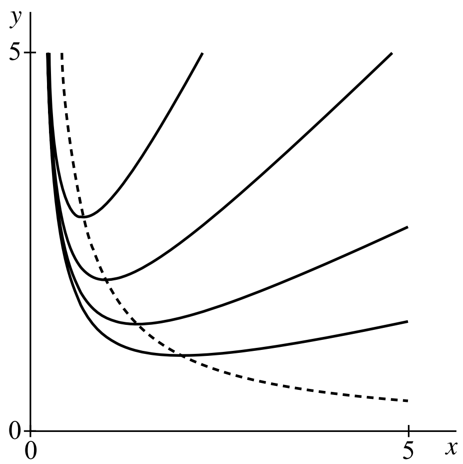
Gebroken functie

Voor elke positieve waarde van a is de functie f_a gegeven door

$$f_a(x) = ax + \frac{1}{x} \text{ met } x > 0$$

In figuur 1 is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

figuur 1



De grafiek van f_a heeft voor elke positieve waarde van a een top.
Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking $xy = c$ voor een zekere waarde van c. Deze hyperbool is in figuur 1 gestippeld weergegeven.

5p **14** Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $xy = c$ liggen en bereken de waarde van c.

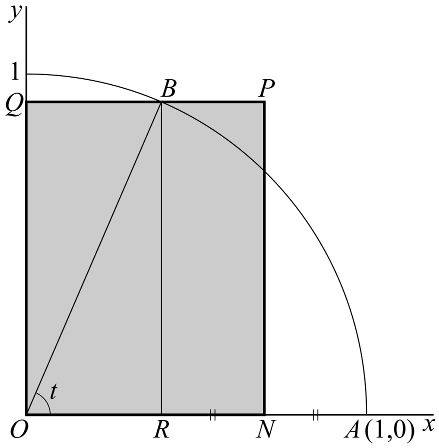
Rechthoeken bij een kwartcirkel

In een rechthoekig assenstelsel Oxy bekijken we het deel van de eenheidscirkel dat in het eerste kwadrant ligt. Het snijpunt met de x-as is $A(1, 0)$.
Op de kwartcirkel ligt een willekeurig punt $B(\cos t, \sin t)$ met $\angle AOB = t$ rad en $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
Punt R is de loodrechte projectie van B op de x-as.
We maken nu twee rechthoeken:

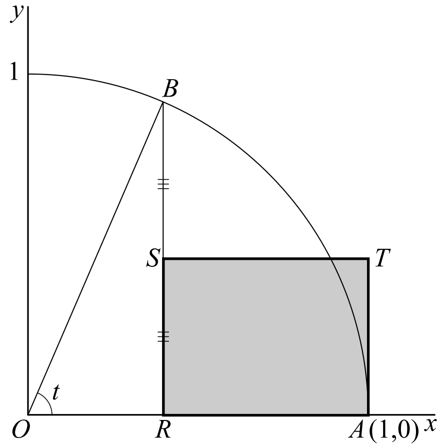
I. Een rechthoek $ONPQ$, waarbij N het midden van AR is en P en Q op dezelfde hoogte als B liggen.
$OQ = \sin t$ en $ON = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$.
Zie figuur 1.
De oppervlakte van deze rechthoek noemen we $V(t)$.

II. Een rechthoek $ATSR$, waarbij S het midden van BR is.
$RS = \frac{1}{2}\sin t$ en $RA = 1 - \cos t$.
Zie figuur 2.
De oppervlakte van deze rechthoek noemen we $W(t)$.

figuur 1



figuur 2



5p **15** Bereken exact de waarde van t waarvoor $V(t) = 3 \cdot W(t)$.

De bovengenoemde rechthoeken zijn gelijkvormig als de verhouding van de zijden van de ene rechthoek gelijk is aan de verhouding van de zijden van de andere rechthoek.
Hiervoor zijn twee mogelijkheden: $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$ of $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$.

4p **16** Toon aan dat voor elke waarde van t met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt: $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$.

Er is een waarde van t (met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) waarvoor geldt dat $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$.

Voor deze waarde van t zijn beide rechthoeken vierkant.

7p **17** Bereken van beide vierkanten exact de zijde voor deze waarde van t.