Examen VWO

2011

tijdvak 1
woensdag 18 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

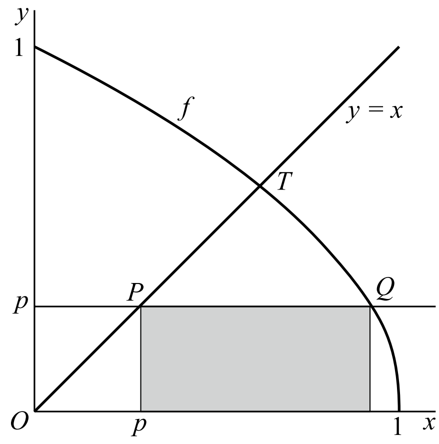
$$\sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{t-u}{2}\cos\tfrac{t+u}{2}$$
$$\cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}$$

Tussen twee grafieken

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{1-x}$.

In figuur 1 zijn op het interval $[0, 1]$ de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend.
De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in het punt T.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.

figuur 1



De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de tegenoverliggende zijde op de x-as ligt, is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.

De x-coördinaat van Q is $1 - p^2$.

3p **1** Toon dit aan.

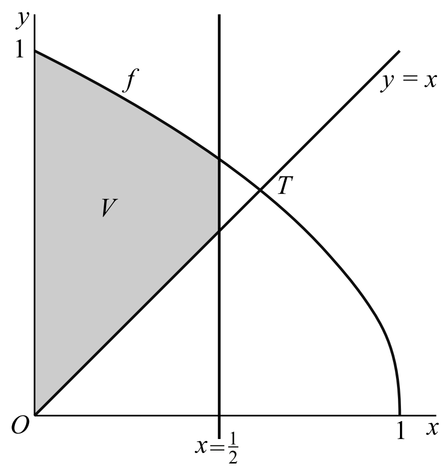
Er is een waarde van p waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

6p **2** Bereken exact deze waarde van p.

Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = \frac{1}{2}$.
Zie figuur 2.

6p **3** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat wanneer V om de x-as wordt gewenteld.

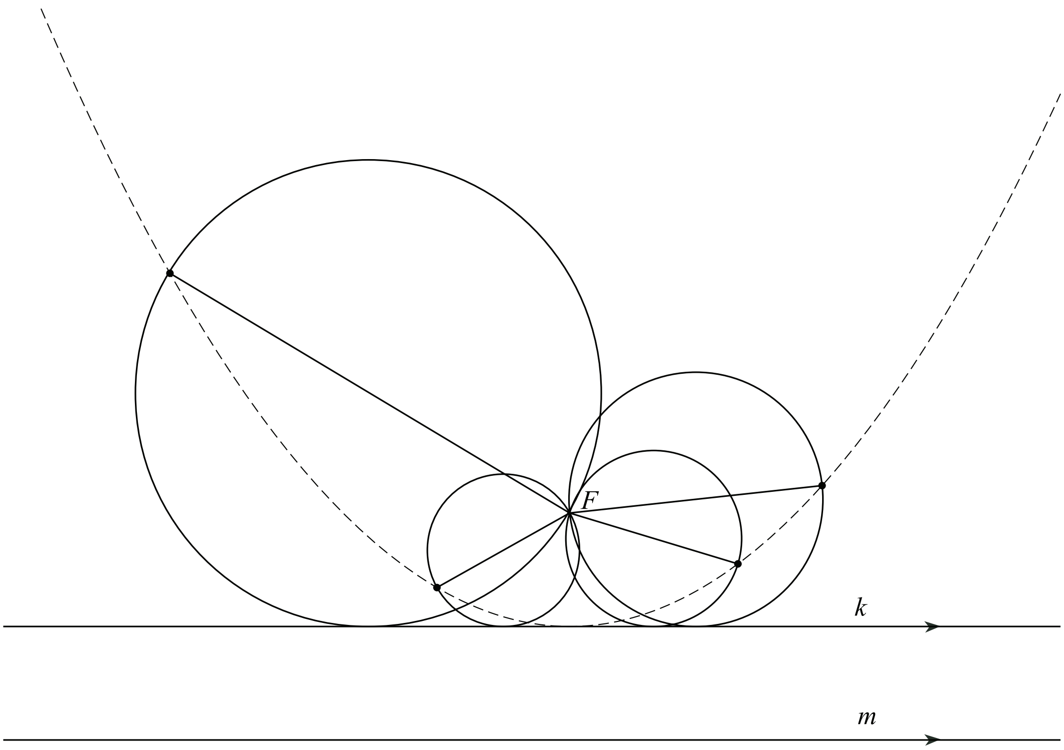
figuur 2



Raakcirkels aan een lijn

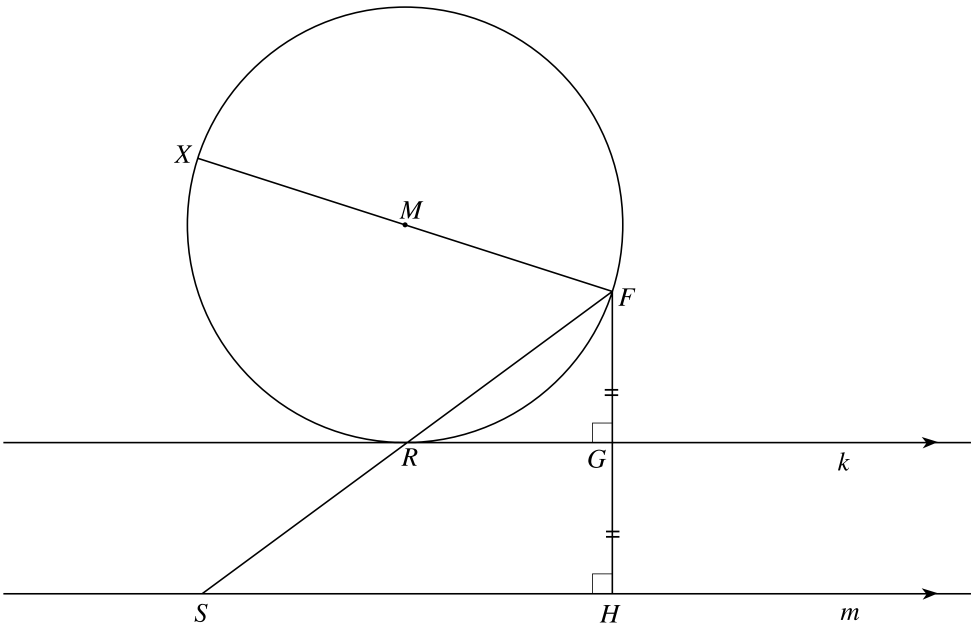
Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen k en m en een punt F, niet op m, zo dat de afstand van F tot k gelijk is aan de afstand van k tot m.
We bekijken de cirkels die door F gaan en aan k raken.
In figuur 1 zijn enkele van deze raakcirkels getekend. In elke raakcirkel is de middellijn vanuit F getekend. Elke middellijn heeft behalve F nog een tweede eindpunt op de raakcirkel.
De tekening doet vermoeden dat deze eindpunten op een parabool met brandpunt F en richtlijn m liggen.

figuur 1



In figuur 2 is een van de raakcirkels getekend met middelpunt M, middellijn FX en raakpunt R. De loodlijn vanuit F op k en m snijdt k in G en m in H, dus $FG = GH$. Lijn FR snijdt m in S.
Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Er geldt: $FR = RS$.

4p **4** Bewijs dit.

Uit $FS = 2 \cdot FR$ en $FX = 2 \cdot FM$ en $\angle XFS = \angle MFR$ volgt de gelijkvormigheid van de driehoeken FXS en FMR (*zhz*).

Met behulp van deze gelijkvormigheid kan bewezen worden dat XS loodrecht op m staat.

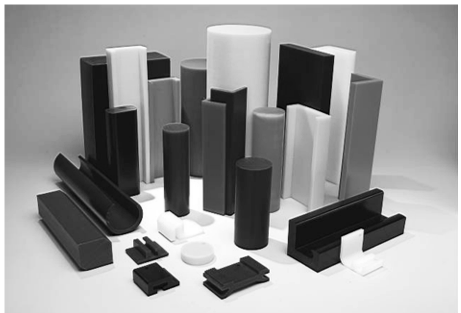
3p **5** Bewijs op deze manier dat XS loodrecht op m staat.

3p **6** Bewijs dat punt X inderdaad ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn m.

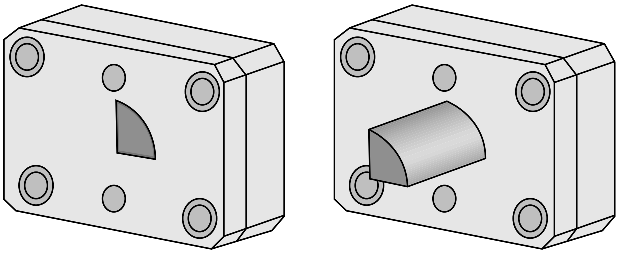
Extrusie

Op de foto hiernaast zie je enkele staven met verschillende profielen. Profielen kunnen gemaakt worden door middel van **extrusie**. Bij deze techniek wordt bijvoorbeeld verwarmde kunststof door een opening geperst. De opening bepaalt de vorm van het extrusieprofiel. In figuur 1 zie je een illustratie hiervan.

foto
extrusieprofielen



figuur 1



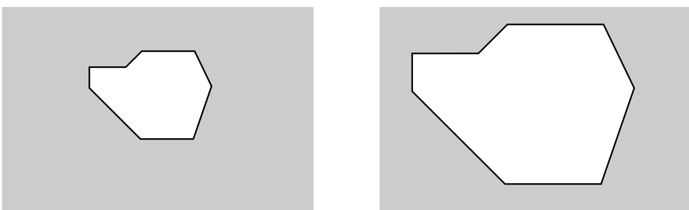
De druk die nodig is om het materiaal door de opening te persen, is onder andere afhankelijk van de grootte en de vorm van de opening. De invloed van de vorm hangt af van het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$.

Hierin is P de omtrek van de opening (in cm) en A de oppervlakte van de opening (in cm^2).

Zo geldt voor cirkelvormige openingen: $\frac{P}{\sqrt{A}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\pi r^2}} = 2\sqrt{\pi} \approx 3,5$.

We vergelijken twee openingen die gelijkvormig zijn. Zie bijvoorbeeld figuur 2.

figuur 2

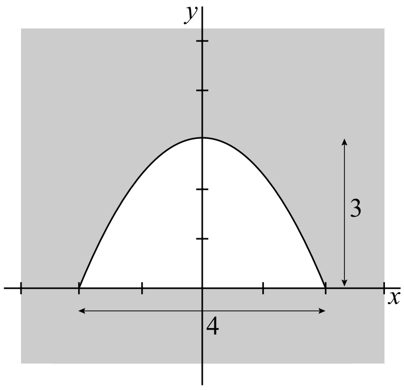


Van de grote opening zijn de breedte en de hoogte k keer zo groot als de breedte en de hoogte van de kleine opening.

3p **7** Toon aan dat het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ voor de grote opening even groot is als voor de kleine opening.

In figuur 3 is een opening getekend waarvan één rand recht is en de andere rand de vorm van een parabool heeft. De rechte rand is 4 cm lang. De top van de parabool bevindt zich 3 cm boven het midden van de rechte rand.
We nemen een assenstelsel met de x-as langs de rechte rand en de y-as door de top van de parabool.
De parabolische rand wordt dan beschreven door de vergelijking $y = 3 - \frac{3}{4}x^2$, met x en y in cm.

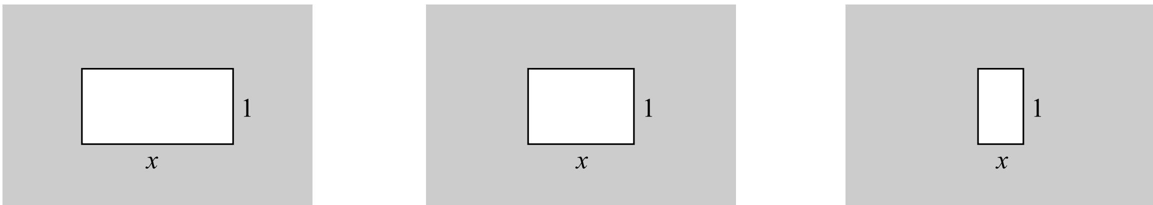
figuur 3



8p **8** Bereken de waarde van het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ voor de opening in figuur 3. Rond je antwoord af op één decimaal.

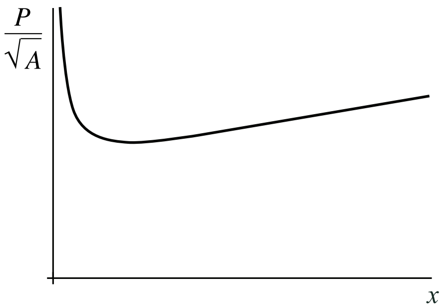
We vergelijken rechthoekige openingen van x bij 1 cm. In figuur 4 staan drie voorbeelden.

figuur 4



In figuur 5 is van dergelijke rechthoekige openingen de waarde van het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ uitgezet tegen x.

figuur 5



De grafiek in figuur 5 heeft één top.

5p **9** Bereken langs algebraïsche weg de x-coördinaat van deze top.

De formule van Gompertz

Verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen maken bij het berekenen van de premies en uitkeringen een schatting van de levensverwachting van verzekerden. Daarbij wordt vaak een formule gebruikt waarvan de vorm gebaseerd is op de resultaten van een onderzoek uit 1825 van de verzekeringswiskundige Benjamin Gompertz (1779 - 1865).

Voor een levensverzekering die op een leeftijd van 40 jaar afgesloten wordt, hanteerde een verzekeringsmaatschappij in de 19e eeuw de volgende formule van Gompertz om het percentage nog levende verzekerden met een bepaalde leeftijd te schatten:

$$P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$$

Hierin is $t \geq 40$ en geeft $P(t)$ aan welk percentage van de mensen die zo'n verzekering afsloten minstens t jaar oud wordt.

4p **10** Bereken hoeveel jaar na het afsluiten van de levensverzekering volgens deze formule de helft van de polishouders is overleden.

De gegeven formule is ook te schrijven in de vorm $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$.

3p **11** Bereken langs algebraïsche weg de waarde van m. Rond je antwoord af op twee decimalen.

De algemene formule van Gompertz heeft de vorm $P(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}$, met positieve waarden van a, b en k.

Een eigenschap van deze algemene formule is:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

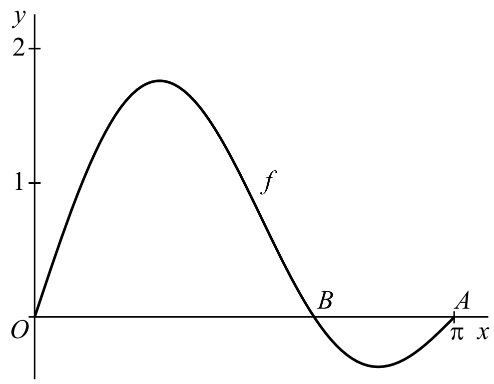
Hierin hangt de waarde van c af van de waarden van b en k.

4p **12** Druk c uit in b en k.

De functie f is gegeven door $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.
In figuur 1 is de grafiek van f getekend. Deze grafiek snijdt de x-as tussen $O(0,0)$ en $A(\pi, 0)$ in het punt B.

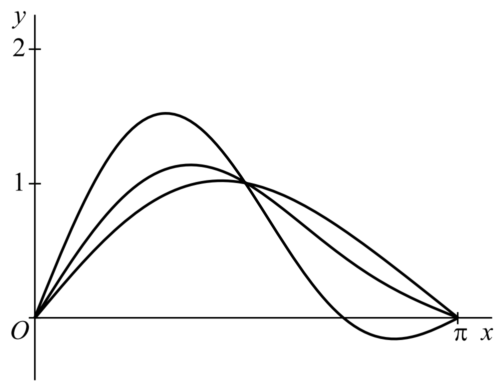
4p **13** Bereken exact de x-coördinaat van punt B.

figuur 1



Voor elke positieve waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.
In figuur 2 is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

figuur 2



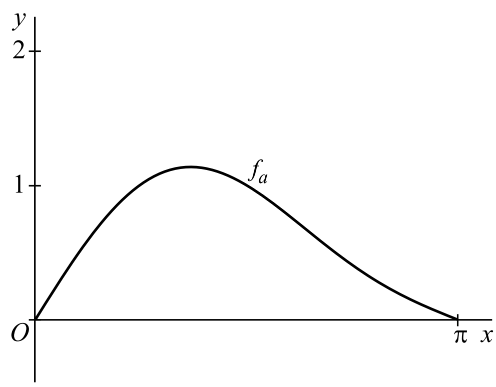
Voor een bepaalde waarde van a heeft de grafiek van f_a twee toppen en is de x-coördinaat van een van deze toppen $\frac{5}{6}\pi$.

5p **14** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van de andere top bij deze waarde van a.

Voor elke waarde van a waarvoor geldt $0 < a < \frac{1}{2}$ ligt de grafiek van f_a tussen $(0,0)$ en $(\pi, 0)$ geheel boven de x-as. In figuur 3 is een dergelijke grafiek getekend.

5p **15** Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x-as, onafhankelijk is van a.

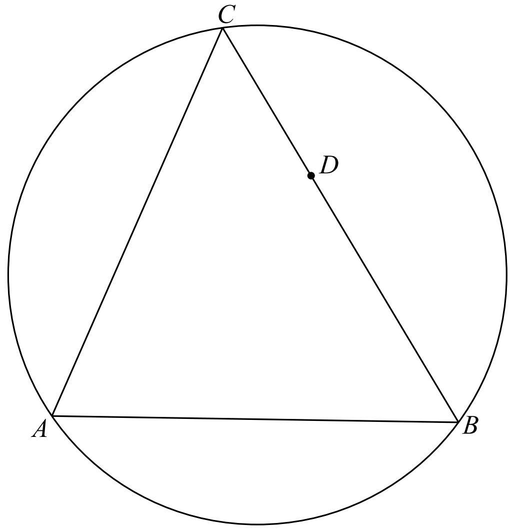
figuur 3



Cirkels bij een driehoek

Gegeven is een driehoek ABC, met punt D op zijde BC. In figuur 1 is deze driehoek getekend met zijn omgeschreven cirkel. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1

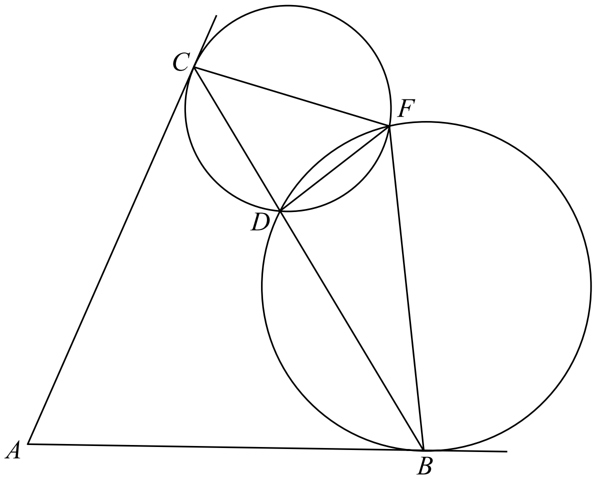


De cirkel door D die de lijn AB raakt in A, snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC behalve in A ook in punt E.

3p **16** Teken op de uitwerkbijlage punt E. Licht je werkwijze toe.

De cirkel door D die de lijn AB raakt in B en de cirkel door D die de lijn AC raakt in C, hebben koorde DF gemeenschappelijk. Zie figuur 2.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



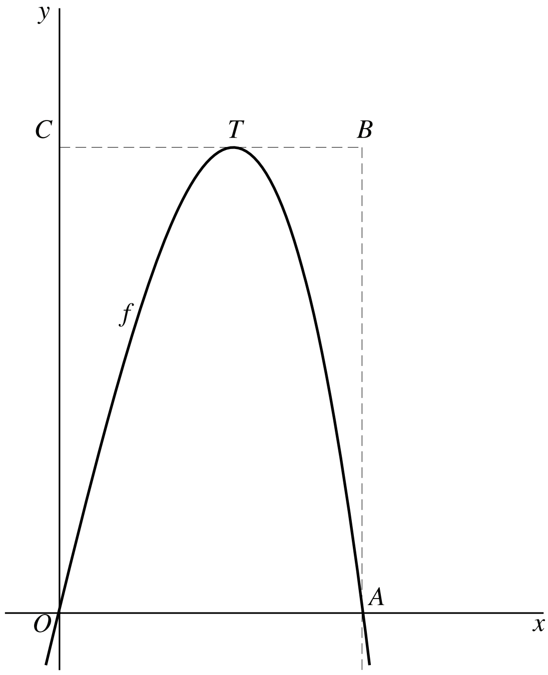
4p **17** Bewijs dat vierhoek $ABFC$ een koordenvierhoek is.

Vierkant bij een derdegraadskromme

De functie f is gegeven door $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in. Zie de figuur.

figuur



8p **18** Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.