# Correctievoorschrift VWO

# 2011

tijdvak 2

## wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Inzenden scores

## 1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.
Voorts heeft het College voor Examens (CvE) op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet CvE de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

1. De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
2. De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommitteerde toekomen.
3. De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.

4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.

5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommitteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommitteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

## 2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Examens van toepassing:

1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.

2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.

3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:

3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;

3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel;

3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;

3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;

3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;

3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal punten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.
Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.
Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht.
Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

## 3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 79 scorepunten worden behaald.

1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

## 4 Beoordelingsmodel

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Een symmetrische gebroken functie

**1 maximumscore 3**

- $\frac{2}{1+e^x} < \frac{1}{100}$ is (omdat $1+e^x$ positief is voor iedere $x$) gelijkwaardig met $1+e^x > 200$ — 2
- Dit geeft $e^x > 199$, dus de oplossing is $x > \ln 199$ — 1

of

- $\frac{2}{1+e^x} = \frac{1}{100}$ is gelijkwaardig met $1+e^x = 200$ — 1
- $e^x = 199$ geeft $x = \ln 199$ — 1
- De oplossing is $x > \ln 199$, met toelichting — 1

**2 maximumscore 4**

- De afgeleide van $2x - 2\ln(1+e^x)$ is $2 - 2 \cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x$ — 2
- $2 - 2 \cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x = \frac{2(1+e^x) - 2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^x}$ $(= f(x))$ — 2

**3 maximumscore 5**

- De gevraagde oppervlakte is $\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - 2\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_0^{\ln 3}$ — 1
- Als $x = \ln 3$ dan $2x - 2\ln(1+\mathrm{e}^x) = 2\ln 3 - 2\ln 4$ — 1
- Als $x = 0$ dan $2x - 2\ln(1+\mathrm{e}^x) = -2\ln 2$, dus de gevraagde oppervlakte is $2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2$ — 1
- $2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2 = \ln 9 - \ln 16 + \ln 4$
  (of: $2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2 = 2\left(\ln 3 - \ln 4 + \ln 2\right) = 2\ln(\frac{3}{4}\cdot 2)$) — 1
- $\ln 9 - \ln 16 + \ln 4 = \ln(\frac{9}{16}\cdot 4) = \ln\frac{9}{4}$ (of: $2\ln(\frac{3}{4}\cdot 2) = \ln(\frac{3}{2})^2 = \ln\frac{9}{4}$) — 1

**4 maximumscore 5**

- $f(-x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ — 1
- Dus $f(x) + f(-x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{2(1+\mathrm{e}^{-x}) + 2(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}$ — 1
- De teller is gelijk aan $2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2)$ — 1
- De noemer is gelijk aan $1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x + 1 = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2$ — 1
- Dit geeft $f(x) + f(-x) = \dfrac{2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2} = 2$ en dus $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$ — 1

of

- $f(-x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ — 1
- Teller en noemer vermenigvuldigen met $\mathrm{e}^x$ geeft $f(-x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ — 2
- Dit geeft $f(x) + f(-x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2 + 2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 2$, dus
  $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$ — 2

## Gelijke afstanden

**5 maximumscore 4**

- Uit de gegevens volgt: $LP = LQ$ en $PR = MQ$ 1
- Verder geldt $ML = MQ - LQ$ en $LR = PR - PL$ 1
- Dus $ML = LR$ 1
- Hieruit volgt: $L$ ligt op de middelloodlijn van $MR$; *middelloodlijn* 1

**6 maximumscore 4**

- De meetkundige plaats is een deel van de parabool met brandpunt $M$ en richtlijn $k$ 1
- De eindpunten van het betreffende deel van de parabool zijn de eindpunten van de cirkelboog 1
- De top van de parabool is getekend als midden van het loodlijnstuk vanuit $M$ op $k$ 1
- Minstens twee andere punten van het deel van de parabool zijn getekend door een punt $R$ op $k$ te kiezen en het snijpunt van de middelloodlijn van $MR$ en de loodlijn door $R$ op $k$ te bepalen (of: door een cirkelboog te tekenen met middelpunt $M$ en een straal die kleiner is dan de straal van de gegeven cirkelboog en snijpunten hiervan te bepalen met de lijn die parallel is met $k$ en die tussen $g$ en $k$ ligt zo dat de afstand tot $k$ gelijk is aan de straal van de nieuwe cirkelboog) 1

## Het ontwerp van een brug

**7 maximumscore 2**

- Uit de vergelijking volgt dat de afstand tussen $A$ en $B$ gelijk is aan $p$ — 1
- Aan eis 1 is voldaan als $p \geq 8,00$ (of: $p > 8,00$) — 1

**8 maximumscore 5**

- $\frac{dy}{dx} = 0,40 \cdot -\sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right) \cdot \frac{2\pi}{p}$ — 2
- De maximale helling is (omdat $p$ positief is en $-\frac{1}{2}p \leq x \leq \frac{1}{2}p$) $\frac{0,80\pi}{p}$ — 1
- Beschrijven hoe de ongelijkheid $\frac{0,80\pi}{p} \leq \frac{1}{15}$ (met $p > 0$) kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: $p \geq 12\pi$ (of: $p \geq 37,7$) — 1

**9 maximumscore 4**

- De lengte van boog $AB$ is $\int_{-20,00}^{20,00} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ — 2
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden — 1
- De lengte van het brugdek (boog $AB$) is 40,04 meter — 1

**10 maximumscore 5**

- De oppervlakte van de zijkant van het rechterdeel is gelijk aan $\int_{8,00}^{20,00} 0,40\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{20,00}x\right)\right)dx$ — 2
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden — 1
- Deze oppervlakte is ongeveer 2,38 ($m^2$) — 1
- (Er is ongeveer) $2 \cdot 3,50 \cdot 2,38 \approx 17$ ($m^3$ beton nodig) — 1

## Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

**11 maximumscore 5**

- Opgelost moet worden $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$ — 1
- Herleiden tot $a^2 - 6a + 6 = 0$ — 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking algebraïsch opgelost kan worden — 1
- De antwoorden $a = 3-\sqrt{3}$ en $a = 3+\sqrt{3}$ (of vergelijkbare uitdrukkingen) — 1

**12 maximumscore 6**

- De lengte van het verbindingslijnstuk op hoogte $b$ is $\dfrac{1}{\sqrt{b}}-\dfrac{1}{b}$ — 1
- De afgeleide van $\dfrac{1}{\sqrt{b}}-\dfrac{1}{b}$ is $-\dfrac{1}{2b\sqrt{b}}+\dfrac{1}{b^2}$ (of $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}}+b^{-2}$) — 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $-\dfrac{1}{2b\sqrt{b}}+\dfrac{1}{b^2}=0$ (of $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}}+b^{-2}=0$) kan worden opgelost — 1
- De oplossing $b=4$ — 1
- De maximale lengte is $\frac{1}{4}$ (of 0,25) — 1

**13 maximumscore 7**

- $f(x)=4$ geeft $\dfrac{1}{x}=4$ dus $x=\frac{1}{4}$ en $g(x)=4$ geeft $\dfrac{1}{x^2}=4$ dus (omdat $x>0$) $x=\frac{1}{2}$ — 1
- De oppervlakte van $V$ is $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ — 2
- Bijbehorende primitieven zijn $4x-\ln x$ en $-\dfrac{1}{x}-\ln x$ — 2
- De oppervlakte van $V$ is dus $(2-\ln\frac{1}{2})-(1-\ln\frac{1}{4})+(-1-\ln 1)-(-2-\ln\frac{1}{2})$ — 1
- Het antwoord is $2-\ln 4$ (of $2-2\ln 2$ of $2+\ln\frac{1}{4}$) — 1

of

- $f(x)=4$ geeft $\dfrac{1}{x}=4$ dus $x=\frac{1}{4}$ en $g(x)=4$ geeft $\dfrac{1}{x^2}=4$ dus (omdat $x>0$) $x=\frac{1}{2}$ — 1
- De oppervlakte van $V$ is $(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\cdot 4+\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ — 2
- Bijbehorende primitieven zijn $-\dfrac{1}{x}$ en $\ln x$ — 2
- De oppervlakte van $V$ is dus $1+(-1+2)-(\ln 1-\ln\frac{1}{4})$ — 1
- Het antwoord is $2-\ln 4$ (of $2-2\ln 2$ of $2+\ln\frac{1}{4}$) — 1

## Het midden van een koorde

**14 maximumscore 3**

- $\Delta MSP \cong \Delta MSQ$ ; (*cirkel*,) *ZZZ* 1
- Hieruit volgt $\angle PSM = \angle QSM$ . Verder geldt $\angle PSM + \angle QSM = 180°$ ; *gestrekte hoek*, dus $\angle PSM = \angle QSM = 90°$ 1
- (Dit geeft $\angle CSM = 90°$ ) dus $S$ ligt op de cirkel met middellijn $MC$; *Thales* 1

of

- De loodlijn uit $M$ op $PQ$ snijdt $PQ$ in het midden $S$; *loodlijn op koorde* 2
- Dus $S$ ligt op de cirkel met middellijn $MC$; *Thales* 1

## Kostenfuncties

**15 maximumscore 4**

- $G(q) = 0,2 \cdot q^2 - 1,2 \cdot q + 4,2 + \frac{1}{q}$ 1
- $G'(q) = 0,4 \cdot q - 1,2 - \frac{1}{q^2}$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $0,4 \cdot q - 1,2 - \frac{1}{q^2} = 0$ kan worden opgelost 1
- Het antwoord $q \approx 3,2$ 1

**16 maximumscore 5**

- $M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ 1
- Dus $M'(q) = (T''(q) =)\ 6a \cdot q + 2b$ 1
- $M'(q) = (T''(q) =)\ 0$ geeft $6a \cdot q + 2b = 0$ ofwel $b = -3a \cdot q$ 1
- $q$ is een (productie)hoeveelheid en dus geldt $q > 0$ 1
- Uit $q > 0$ en $a > 0$ volgt $b < 0$ 1

of

- $M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ 1
- De grafiek van $M$ is (omdat $a > 0$ ) een dalparabool met $q_{top} = -\frac{2b}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$ 2
- $q$ is een (productie)hoeveelheid en dus geldt $q_{top} > 0$ 1
- Uit $q_{top} > 0$ en $a > 0$ volgt $b < 0$ 1

| | | |
|---|---|---|
| **17** | **maximumscore 4** | |
| | • $G'(q) = \dfrac{T'(q) \cdot q - T(q) \cdot 1}{q^2}$ | 2 |
| | • Uit $G'(q_0) = 0$ volgt $T'(q_0) \cdot q_0 - T(q_0) = 0$ | 1 |
| | • Hieruit volgt $T'(q_0) = \dfrac{T(q_0)}{q_0}$, dus $M(q_0) = G(q_0)$ | 1 |

## Twee snijdende cirkels

| | | |
|---|---|---|
| **18** | **maximumscore 4** | |
| | • $MB = MD$ en $NB = NC$; *cirkel*, dus $\angle MDB = \angle MBD$ en $\angle NCB = \angle NBC$; *gelijkbenige driehoek* | 1 |
| | • $\angle MBD = \angle NBC$; *overstaande hoeken* | 1 |
| | • Dus $\angle MDB = \angle NCB$ ofwel $\angle MDN = \angle NCM$ | 1 |
| | • Hieruit volgt dat de punten $C$ en $D$ op dezelfde cirkelboog $MN$ liggen; *constante hoek* (dus $M$, $N$, $C$ en $D$ liggen op één cirkel) | 1 |

## 5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 24 juni naar Cito.