Examen VWO

2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

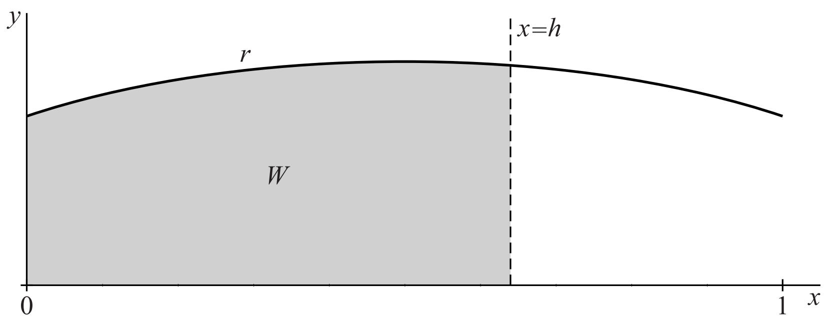
$$\sin(t+u)=\sin t\cos u+\cos t\sin u$$
$$\sin(t-u)=\sin t\cos u-\cos t\sin u$$
$$\cos(t+u)=\cos t\cos u-\sin t\sin u$$
$$\cos(t-u)=\cos t\cos u+\sin t\sin u$$

$$\sin t+\sin u=2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\sin t-\sin u=2\sin\tfrac{t-u}{2}\cos\tfrac{t+u}{2}$$
$$\cos t+\cos u=2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\cos t-\cos u=-2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}$$

Een regenton

Op het domein [0, 1] is de functie r gegeven door $r(x)=\frac{1}{10}\sqrt{5+15x-15x^2}$.
W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as, de y-as, de grafiek van r en de lijn $x=h$, met $0<h\leq 1$. Zie de onderstaande figuur.

figuur



Voor het volume V van het omwentelingslichaam dat ontstaat door vlakdeel W om de x-as te wentelen, geldt:

$$V=\frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right)$$

5p **1** Toon aan dat deze formule voor V juist is.

Als de grafiek van r om de x-as gewenteld wordt, ontstaat een figuur die lijkt op een regenton. Voor x, h en r nemen we de meter als eenheid, zodat de ton 1 meter hoog is.
V is dus het volume van het water in de ton als het water h meter hoog staat.

5p **2** Bereken de waterhoogte in de ton als deze voor drie vierde deel is gevuld. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

foto

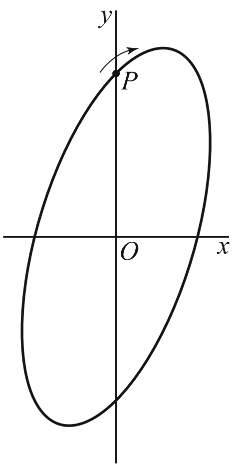
Een ellipsvormige baan

Punt P doorloopt in het Oxy-vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin t \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.
De baan van P is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Gedurende de beweging verandert de afstand van P tot de oorsprong.

3p **3** Bereken de maximale afstand van P tot de oorsprong. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

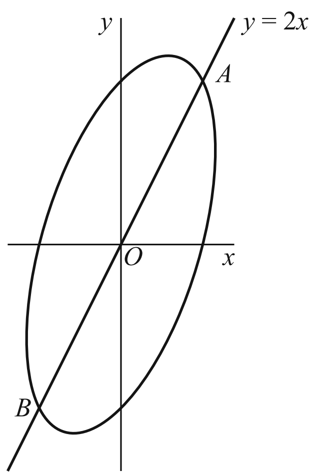
De snelheid van P op tijdstip t is $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$.

4p **4** Bereken exact de snelheid van P als $t = 0$.

De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B. Zie figuur 2.

6p **5** Bereken exact de coördinaten van A en B.

figuur 2



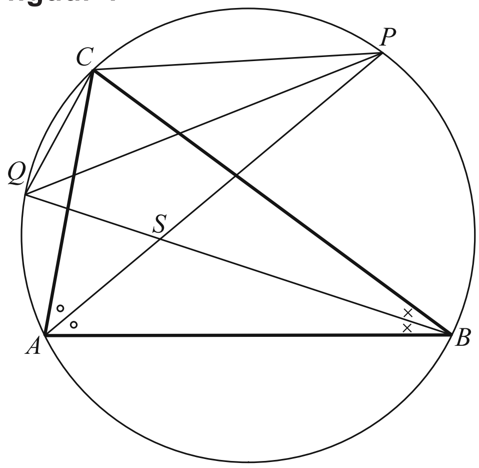
Bissectrices en omgeschreven cirkel

Gegeven is een driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel.
De bissectrice van hoek A snijdt de omgeschreven cirkel in punt P en de bissectrice van hoek B snijdt deze cirkel in punt Q. Het snijpunt van de bissectrices is S.
Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

Er geldt: driehoek CPQ is congruent met driehoek SPQ.

3p **6** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitwerkbijlage.

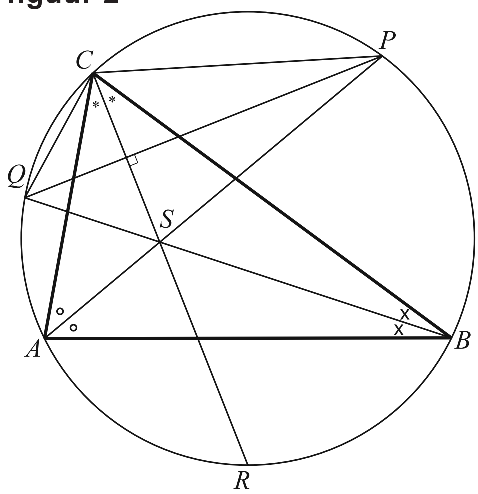
figuur 1



In figuur 2 is in driehoek ABC ook de bissectrice van hoek C getekend. Deze gaat door S en snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in punt R.

Met behulp van de **congruentie** van de driehoeken CPQ en SPQ volgt: de lijnen PQ en CR staan loodrecht op elkaar.

figuur 2

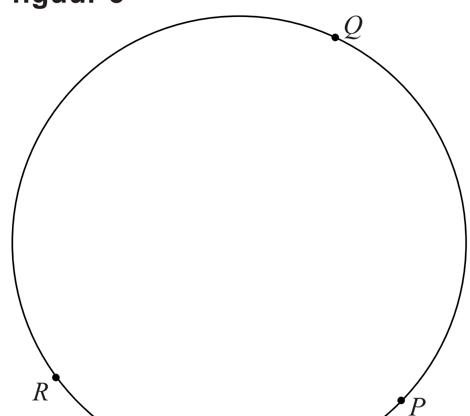


In figuur 3 zie je alleen een cirkel waarop drie punten P, Q en R liggen. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

Bij deze punten P, Q en R is er een driehoek ABC waarvoor geldt: A, B en C liggen op de gegeven cirkel zó dat de lijnen AP, BQ en CR de bissectrices zijn van de hoeken van driehoek ABC.

3p **7** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage deze driehoek ABC. Licht je werkwijze toe.

figuur 3



Medicijn in actieve vorm

Sommige medicijnen kennen een passieve en een actieve vorm. Ze worden in passieve vorm ingespoten en door het lichaam omgezet in actieve vorm.

De hoeveelheid medicijn in passieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten nog niet is omgezet in actieve vorm, noemen we $p(t)$. Als 25 mg wordt ingespoten, geldt de volgende formule:

$$p(t) = 25 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Hierbij is k een positieve constante waarvan de waarde afhangt van het type medicijn. Hoe groter k, hoe sneller het medicijn in passieve vorm wordt omgezet in actieve vorm.

Om de werkzaamheid van het medicijn te onderzoeken, meet men hoe lang het duurt tot 99% van de hoeveelheid medicijn in passieve vorm is omgezet naar medicijn in actieve vorm. Deze tijdsduur t_{99} hangt af van k.

3p **8** Druk t_{99} uit in k.

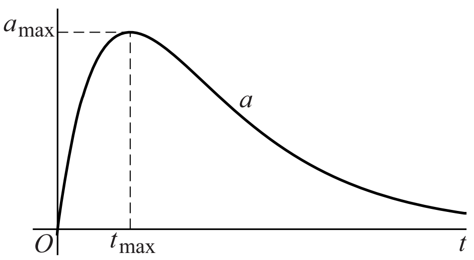
Het medicijn in actieve vorm wordt door de lever afgebroken. De omzetting van medicijn in passieve vorm naar medicijn in actieve vorm en de afbraak van medicijn in actieve vorm vinden gelijktijdig plaats.

Een patiënt krijgt een injectie met een dergelijk medicijn. De hoeveelheid medicijn in actieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten in het lichaam zit, noemen we $a(t)$. Voor $a(t)$ geldt:

$$a(t) = 25\left(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}\right)$$

In figuur 1 is de grafiek van a getekend.

figuur 1

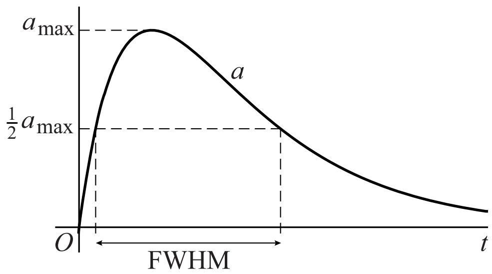


Het maximum van a noemen we a_{max}. Dit maximum wordt aangenomen op tijdstip t_{max}.

4p **9** Bereken t_{max} met behulp van differentiëren.

Als maat voor de tijdsduur die een medicijn werkzaam is, wordt gekeken naar de zogenoemde FWHM (*Full Width at Half Maximum*). Dat is de breedte van de piek in de grafiek van a ter hoogte van $\frac{1}{2}a_{max}$. Anders gezegd: de FWHM geeft aan hoe lang de hoeveelheid medicijn in actieve vorm in het lichaam minstens 50% is van de maximale hoeveelheid a_{max}.
In figuur 2 is de FWHM aangegeven.

figuur 2

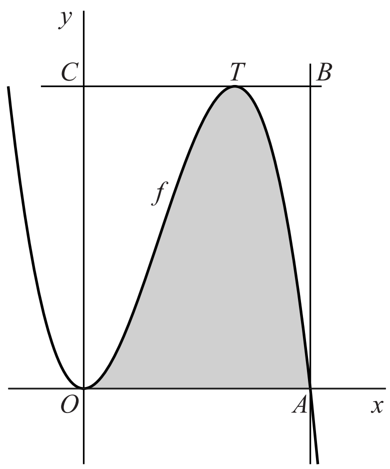


6p **10** Bereken de FWHM in uren nauwkeurig.

Onafhankelijk van *p*

Voor elke positieve waarde van p is een functie f gegeven door
$f(x) = -x^3 + 3px^2$.
De grafiek van f heeft twee punten met de x-as gemeenschappelijk: $O(0, 0)$ en punt A. Zie onderstaande figuur.
De top van de grafiek van f die rechts van de y-as ligt, noemen we T.
De horizontale lijn door T snijdt de y-as in punt C en snijdt de verticale lijn door A in punt B. De oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f binnen rechthoek $OABC$ is in de figuur grijs gemaakt.

figuur

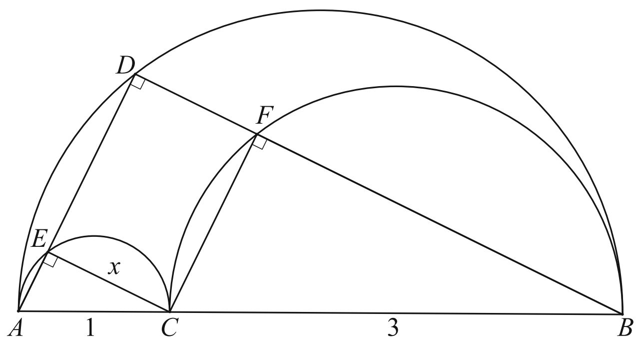


8p **11** Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van het grijze gebied en de oppervlakte van rechthoek $OABC$ onafhankelijk is van p.

Drie halve cirkels

Op een lijnstuk AB met lengte 4 ligt het punt C zo dat $AC = 1$.
Op AC, CB en AB zijn halve cirkels getekend, alle drie aan dezelfde kant van AB. D is een punt op de grootste halve cirkel, niet gelijk aan A of B.
AD en BD snijden de andere halve cirkels respectievelijk in de punten E en F.
Zie de onderstaande figuur. Hierin zijn ook de lijnstukken CE en CF getekend.

figuur



Op grond van de stelling van Thales zijn de hoeken ADB, AEC en CFB recht.
Hieruit volgt dat $CFDE$ een rechthoek is.
De driehoeken ACE, CBF en ABD zijn gelijkvormig.

De lengte van CE noemen we x.
De oppervlakte van rechthoek $CFDE$ is dan $3\sqrt{x^2 - x^4}$.

3p **12** Toon dit laatste aan.

Als D over de grootste halve cirkel beweegt, verandert de oppervlakte van rechthoek $CFDE$.
Er zijn twee situaties waarin deze oppervlakte gelijk is aan $\sqrt{2}$. Voor één van deze situaties geldt dat E op de linker helft van de boog AC ligt.

5p **13** Bereken exact de lengte van CE voor deze situatie.

Als D over de grootste halve cirkel beweegt, is er een situatie waarin de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is.

7p **14** Ga op algebraïsche wijze na of rechthoek $CFDE$ in deze situatie een vierkant is.

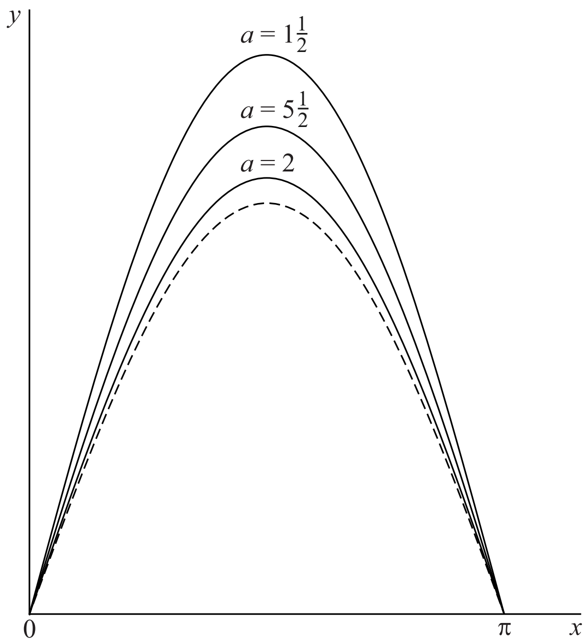
Kleinste amplitude

Voor elke waarde van a, met $a > 1$, is de functie f_a met domein $[0, \pi]$ gegeven door

$$f_a(x) = \frac{a}{\ln a} \cdot \sin x$$

In de figuur is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

figuur



Voor elke waarde van a is de grafiek van f_a een sinusoïde. In de figuur is te zien dat de amplitude bij $a = 2$ kleiner is dan bij $a = 1\frac{1}{2}$ of $a = 5\frac{1}{2}$.

Er is een waarde van a waarvoor de amplitude minimaal is. De grafiek van f_a bij deze waarde van a is in de figuur gestippeld getekend.

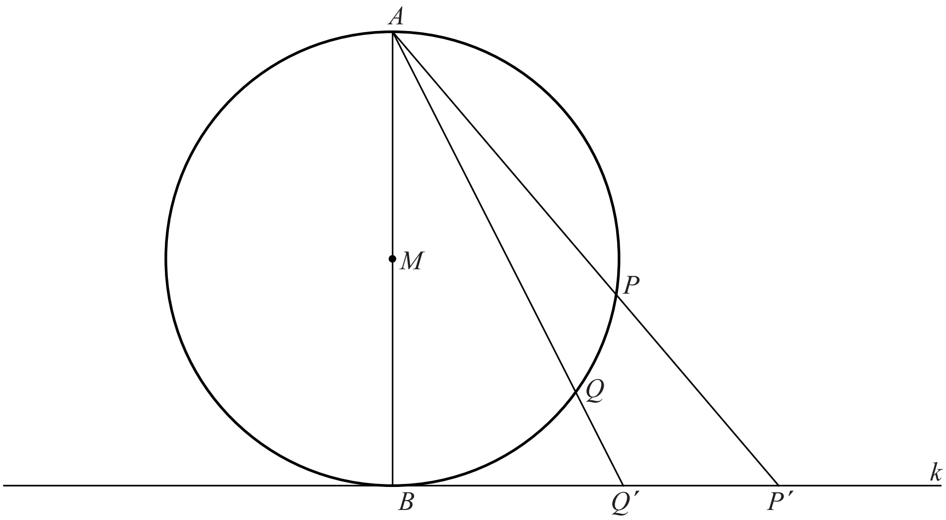
8p **15** Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as en de grafiek van f_a met de kleinste amplitude.

Vier punten op een cirkel

Gegeven is een cirkel met middelpunt M en een middellijn AB. k is de raaklijn aan de cirkel in punt B.
Op de cirkel liggen twee punten P en Q zodanig dat P en Q beide aan dezelfde kant van AB liggen én dat Q op de kleinste boog tussen B en P ligt.
De snijpunten van de lijnen AP en AQ met k zijn respectievelijk P' en Q'.

De figuur hieronder staat twee maal op de uitwerkbijlage.

figuur



Er geldt: $\angle ABP = \angle AP'B$.

4p **16** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitwerkbijlage.

4p **17** Bewijs dat P, Q, Q' en P' op één cirkel liggen. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitwerkbijlage.