Examen VWO
2013

tijdvak 1
woensdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Lichaamsoppervlak

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak. Gegevens over iemands lichaamsoppervlak worden bijvoorbeeld gebruikt voor risico-analyse bij bestrijdingsmiddelen. De schadelijke stoffen hierin kunnen via de huid in het lichaam worden opgenomen. In een rapport van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) is een tabel te vinden waarin onder andere de lichaamsoppervlakte is af te lezen. Een gedeelte van deze tabel is hieronder weergegeven.

tabel

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam.

Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

3p **1** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Er zijn ook formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} \quad \text{(formule van Mosteller)}$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378} \quad \text{(formule van Haycock)}$$

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Voor een kind met een lengte van 1 meter ($L = 100$) blijken de grafieken van de formules van Mosteller en Haycock bijna samen te vallen. Behalve bij $M = 0$ kg is er bij $L = 100$ nóg een lichaamsgewicht waarbij de formule van Mosteller en de formule van Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven.

4p **2** Bereken dat lichaamsgewicht in één decimaal nauwkeurig.

Om de formules nog beter met elkaar te kunnen vergelijken, is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

De formule van Mosteller kan geschreven worden in de vorm

$$S_{\text{Mosteller}} = c \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$$

3p **3** Laat dat zien en bereken de waarde van c.

Dialecten vergelijken

Taalkundigen doen veel onderzoek naar de dialecten in Nederland en Vlaanderen.
Onderzoeker M. Spruit onderzocht in 2008 in hoeverre dialecten op elkaar lijken. De mate waarin twee dialecten verschillen, wilde hij uitdrukken in een getal. Daarom vergeleek hij steeds twee dialecten op een aantal kenmerken en telde hij vervolgens de verschillen. Elk verschil tussen deze twee dialecten leverde een punt op. Het totale aantal punten is de **Hammingafstand** tussen deze twee dialecten.
Bijvoorbeeld: in Lunteren kan men zeggen: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”, maar ook: “Jan herinnert **z’n eigen** dat verhaal wel”. In Veldhoven zegt men altijd: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”. In geen van beide dialecten gebruikt men hier “**hem**” of “**zichzelf**” of “**hemzelf**”, iets dat in andere dialecten wel voorkomt.

Het vergelijken van deze vijf kenmerken levert dus in totaal 1 punt op voor de Hammingafstand. Dat is in tabel 1 weergegeven.

tabel 1

	Lunteren	Veldhoven	punten (voor Hammingafstand)
zich	+	+	0
hem	–	–	0
z’n eigen	+	–	1
zichzelf	–	–	0
hemzelf	–	–	0

Stel men vergelijkt dialect X met het dialect van Lunteren. En stel dat vergelijken van de vijf kenmerken uit tabel 1 in totaal 3 punten oplevert voor de Hammingafstand. In dialect X wordt ook “zich” gebruikt.

4p **4** Schrijf alle mogelijkheden voor deze vijf kenmerken voor dialect X op. Gebruik hiervoor de tabel op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker vergeleek niet vijf, maar 507 kenmerken. Het resultaat is een tabel waarin per tweetal dialecten de Hammingafstand te zien is. In tabel 2 zie je hier een gedeelte van.
Het getal 66 in deze tabel voor het tweetal Lunteren-Bellingwolde (of Bellingwolde-Lunteren) betekent dat bij deze twee dialecten 66 van de 507 kenmerken verschillen: de Hammingafstand is 66.

tabel 2

Dialect	**Lunteren**	**Bellingwolde**	**Hollum**	**Doel**	**Sint-Truiden**	**Veldhoven**
Lunteren	–	66	52	122	77	47
Bellingwolde	66	–	56	134	81	51
Hollum	52	56	–	116	63	59
Doel	122	134	116	–	115	111
Sint-Truiden	77	81	63	115	–	72
Veldhoven	47	51	59	111	72	–

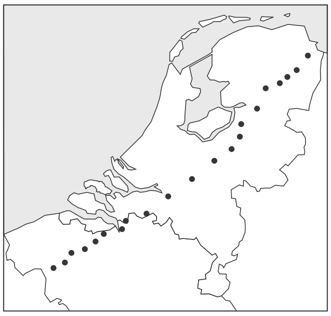
In tabel 2 heeft de onderzoeker dus 15 Hammingafstanden berekend.
In totaal stonden er echter geen 6 dialecten, maar 267 dialecten in de tabel. Bij elk tweetal heeft de onderzoeker de Hammingafstand berekend.

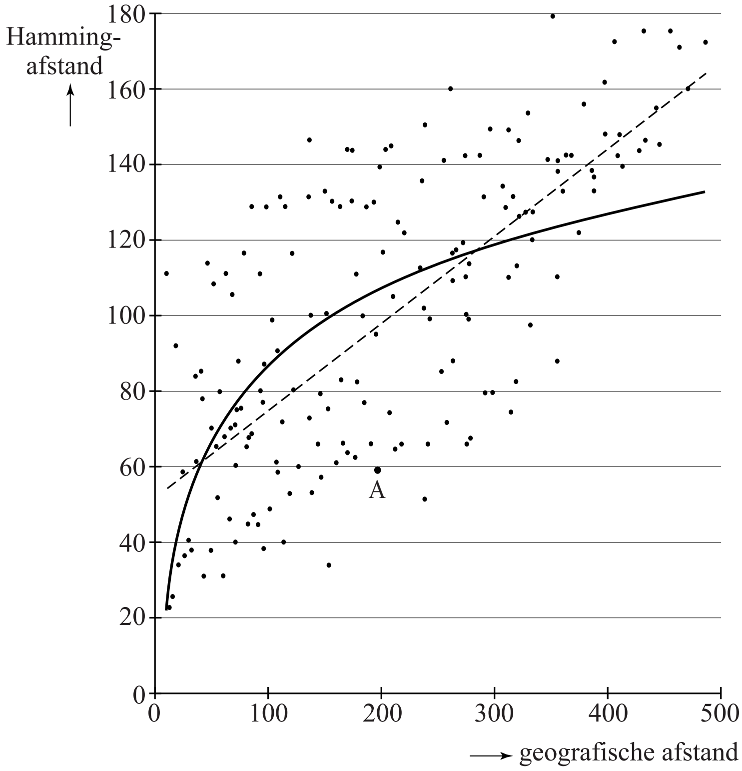
3p **5** Bereken hoeveel Hammingafstanden de onderzoeker in totaal heeft berekend.

De onderzoeker zocht naar een verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand van dialecten. In het kaartje in de figuur op de volgende pagina zie je een aantal dialecten met stippen aangegeven. In het assenstelsel is voor elk tweetal dialecten de Hammingafstand (in punten) uitgezet tegen de geografische afstand (in km).
In het assenstelsel kun je zien dat bij punt A de afstand tussen twee plaatsen gelijk is aan 200 km en de Hammingafstand ongeveer gelijk is aan 58. Het assenstelsel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker heeft op twee manieren geprobeerd het verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand met een wiskundig verband te benaderen. Beide manieren, een lineair verband en een logaritmisch verband, zijn weergegeven in het assenstelsel.

figuur





4p **6** Stel een formule op voor het lineaire verband in de figuur. Je kunt daarbij gebruikmaken van de grafiek op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker heeft in het assenstelsel ook een grafiek voor een logaritmisch verband getekend. De formule voor dit logaritmische verband is:

$$H = -45{,}88 + 66{,}44\log(x)$$

Hierin is H de Hammingafstand en x de geografische afstand in km.
Als de geografische afstand verdubbelt, neemt de Hammingafstand steeds met dezelfde waarde toe.

3p **7** Bereken deze waarde.

Wie is de dader?

De politie heeft drie verdachten van de poging tot moord op buschauffeur Robert gearresteerd: Stolberg, Jones en Visser. Alle drie ontkennen ze de dader te zijn. Tijdens het verhoor beweert Stolberg dat Robert een vriend van Jones was en dat Visser Robert haatte. Jones beweert dat hij Robert helemaal niet kent, en dat hij bovendien helemaal niet in de stad was, toen Robert daar neergestoken werd. Visser beweert dat hij zowel Stolberg als Jones samen met Robert in de stad gezien heeft toen Robert neergestoken werd en dat één van beiden Robert neergestoken moet hebben.

We nemen aan dat slechts één van de drie schuldig is en dat de twee onschuldigen de waarheid spreken. Om uit te zoeken wie de dader is, bekijken we de volgende twee beweringen:

A: Jones spreekt de waarheid

B: Visser spreekt de waarheid

Uit bovenstaande gegevens volgt dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$

3p **8** Toon aan dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$

Uit $A \Rightarrow \neg B$ volgt dat óf Jones óf Visser de dader is.

3p **9** Leg uit wie de dader is.

Gelijke volumes

foto

Op de foto zie je een kunstwerk bestaande uit een zuil, een kubus en een plaat. Het heet *Drie gelijke volumes*, omdat de drie objecten dezelfde inhoud hebben.
De lengte, hoogte en breedte van de kubus zijn 1 m. De zuil is 4 m hoog en de lengte en breedte van de zuil zijn aan elkaar gelijk.

3p **10** Bereken de lengte en de breedte van de zuil.

Op de uitwerkbijlage zie je een grotere foto van het kunstwerk.

4p **11** Geef op de uitwerkbijlage op de zuil aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte. Rond je antwoord af op gehele dm.

Op de uitwerkbijlage bij vraag 12 moet de plaat in perspectief getekend worden. De afmetingen van de plaat zijn 200 bij 200 bij 25 cm. Als begin is een deel van de onderkant van de plaat in perspectief getekend, namelijk vierkant $ABCD$ van 100 bij 100 cm.

6p **12** Maak een perspectieftekening van de hele plaat op de uitwerkbijlage, zodanig dat punt C het hoekpunt van de onderkant van de plaat is dat rechtsachter ligt.

Het kunstwerk bestaat uit 3 voorwerpen (plaat, kubus, zuil) met elk een vierkant grondvlak en een inhoud van 1 m^3. Het is ook mogelijk om een hele serie van zulke voorwerpen te maken.
Stel, we noemen de plaat voorwerp nummer 1 en we maken van elk volgend voorwerp in de serie de hoogte steeds 25 cm hoger. Het grondvlak moet steeds vierkant zijn en de inhoud steeds 1 m^3. Voor de hoogte van een voorwerp geldt de volgende formule: $h = 25n$. Hierbij is h de hoogte in cm en n het nummer van het voorwerp. De kubus is nu het voorwerp met nummer 4.

2p **13** Bereken welk nummer de zuil heeft in deze serie.

Noem de lengte in cm van een zijde van het vierkante grondvlak van een voorwerp uit deze serie l. Omdat de inhoud van elk voorwerp uit deze serie gelijk is aan 1 m^3, dus gelijk is aan 1 000 000 cm^3, geldt nu het volgende:

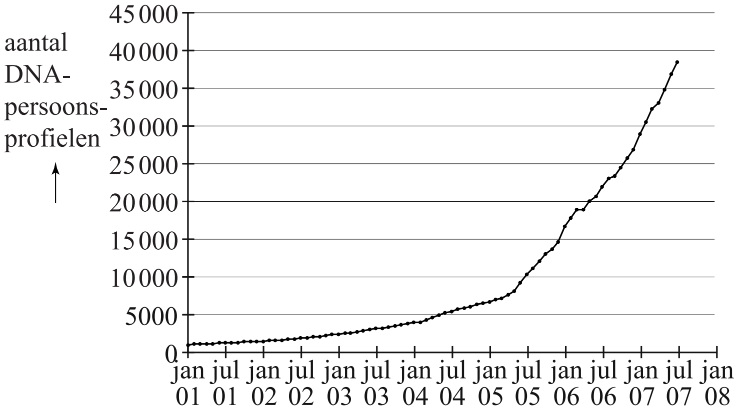
$$l^2 \cdot h = 1\,000\,000$$

Uitgaande van deze formule kan men een formule opstellen waarin l wordt uitgedrukt in n.

3p **14** Stel deze formule op.

Ieder mens heeft DNA in al zijn cellen. Van een persoon, bijvoorbeeld een verdachte van een misdrijf, kan men een zogenoemd **DNA-persoonsprofiel** maken.
Het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) verzamelt alle DNA-profielen in een DNA-databank.
In de figuur zie je de groei van het aantal DNA-persoonsprofielen in de DNA-databank in de periode 2001 tot 2007. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Het aantal DNA-persoonsprofielen is in de periode 2001-2005 bij benadering exponentieel gegroeid van 1000 op 1 januari 2001 tot 7500 op 1 april 2005.

5p **15** Toon met behulp van deze gegevens aan dat het aantal DNA-persoonsprofielen in deze periode met ongeveer 4,03% per maand groeide.

In februari 2005 is wettelijk vastgelegd dat van bepaalde groepen veroordeelden DNA-persoonsprofielen worden gemaakt. In de figuur is duidelijk te zien dat vanaf 1 mei 2005 het aantal DNA-persoonsprofielen in de databank sneller is gaan groeien. Het aantal DNA-persoonsprofielen is vanaf 1 januari 2007 tot 1 juli 2007 bij benadering lineair gegroeid. Neem aan dat deze groei zich in de jaren daarna zo voortzet.

4p **16** Bereken hoeveel DNA-persoonsprofielen er dan op 1 september 2013 in de databank zouden zitten. Je mag hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op duizendtallen.

Van sporen bij een misdrijf, bijvoorbeeld haren of bloedvlekken, wordt vaak een **DNA-spoorprofiel** gemaakt. In september 2009 zaten er in werkelijkheid ongeveer 88 000 DNA-persoonsprofielen en 40 000 DNA-spoorprofielen in de databank. Door een DNA-spoorprofiel te vergelijken met een DNA-persoonsprofiel, kan men achterhalen van wie het spoor geweest zou kunnen zijn. Als twee DNA-profielen in de databank overeenkomen, spreekt men van een **match**. Het kan hier gaan om het profiel van een spoor en het profiel van een persoon maar ook om de profielen van twee sporen.

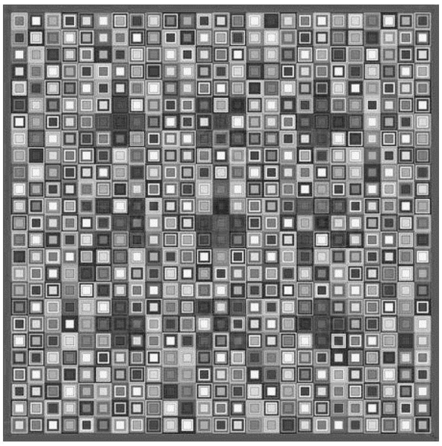
Bij het zoeken naar matches moet men de DNA-profielen in de databank twee aan twee met elkaar vergelijken. Zowel bij de vergelijking spoor-persoon als bij spoor-spoor gaat het hier om zeer veel mogelijkheden.

3p **17** Bereken het aantal mogelijke vergelijkingen spoor-persoon en het aantal mogelijke vergelijkingen spoor-spoor uitgaande van het aantal DNA-profielen in de databank in september 2009.

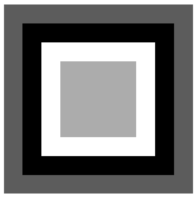
Vierkanten

Op de foto hieronder zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat opgebouwd is uit 25 bij 25 vierkanten. Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante ‘randen’ eromheen. Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn. In figuur 1 en figuur 2 zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van figuur 1 zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meer keren voorkomen: zie figuur 2. En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

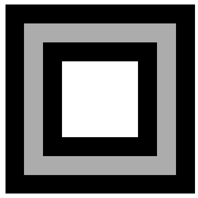
foto



figuur 1



figuur 2



3p **18** Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers: wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4. Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In figuur 1 is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.
Figuur 2 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

3p **19** Bereken op dezelfde manier welk getal in figuur 2 afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het **magische getal**. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In figuur 3 zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

figuur 3

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.
Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$som = 0{,}5 \cdot aantal\ \ termen \cdot (eerste\ term + laatste\ term)$$

4p **20** Bereken met behulp van de bovenstaande formule het magische getal van het kunstwerk.

In het algemeen geldt voor een kunstwerk van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

$$magisch\ getal = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door gebruik te maken van het volgende:

- Voor de som van alle getallen in het kunstwerk geldt de formule $som = 0{,}5 \cdot aantal\ \ termen \cdot (eerste\ term + laatste\ term)$
- Het aantal termen is p^2 (dit is namelijk gelijk aan het aantal getallen in een kunstwerk van p bij p getallen)
- De eerste term is 0, de laatste term is $p^2 - 1$
- Het magische getal is gelijk aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

4p **21** Laat zien hoe je met behulp van het bovenstaande de formule $magisch\ getal = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$ kunt afleiden.

Voor een expositie wil een andere kunstenaar een werk maken vergelijkbaar met dat van Margaret Kepner van hierboven. Dit kunstwerk is een stuk kleiner en moet opgebouwd zijn uit p bij p vierkantjes die verschillende getallen voorstellen. De kunstenaar wil weten bij welke waarden van p het magische getal van zo'n kunstwerk ligt tussen 500 en 1000.

4p **22** Bereken voor welke waarden van p dat het geval is.