Wiskunde A 1,2 (nieuwe stijl)

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 01

Tijdvak 1
Woensdag 23 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 7 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

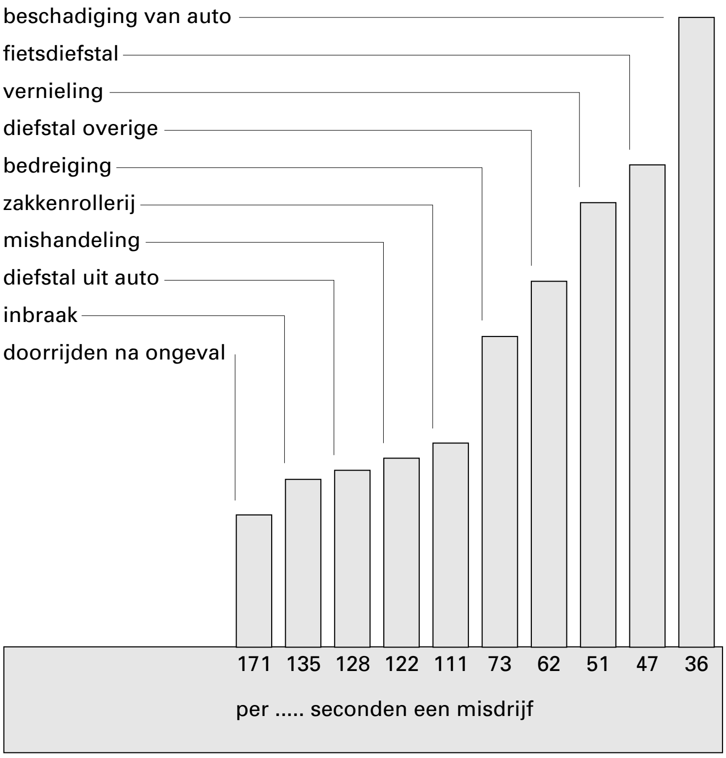
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Opgave 1 Misdrijven

Elk jaar worden in Nederland veel misdrijven gemeld. Deze variëren van het stelen van een chocoladereep tot het plegen van een moord.
Misdrijven worden gemeld bij het Openbaar Ministerie (OM). Het OM beslist dan over de (eventuele) vervolging van de daders.
In figuur 1 vind je informatie over misdrijven die in 1996 werden gemeld.

figuur 1



De getallen langs de horizontale as geven voor elke categorie aan hoeveel seconden er gemiddeld tussen twee opeenvolgende meldingen zitten.
Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in 1996 in Nederland (gemiddeld) elke 135 seconden een inbraak werd gemeld.
Let op: 1996 was een schrikkeljaar en had dus 366 dagen.

In figuur 1 komt ook de categorie ’fietsdiefstal’ voor.

4p **1** □ Toon aan dat er in 1996 ongeveer 670 000 keer een fietsdiefstal werd gemeld.

Als je de staafjes en de getallen in figuur 1 bekijkt, dan zie je:
- van links naar rechts zijn de getallen steeds kleiner;
- van links naar rechts zijn de staafjes steeds langer.

3p **2** □ Leg uit hoe uit de getallen kan worden afgeleid dat een langere staaf bij een groter aantal misdrijven hoort.

In drie van de 10 categorieën misdrijven komt het woord diefstal voor, namelijk: ’fietsdiefstal’, ’diefstal overige’ en ’diefstal uit auto’.
Je kunt deze drie categorieën samenvoegen tot één (nieuwe) categorie ’diefstal’.
Je moet dan de drie bijbehorende staafjes vervangen door één (nieuwe) staaf. Onder deze nieuwe staaf ’diefstal’ moet dan ook weer een getal staan.

4p **3** □ Bereken welk getal onder deze nieuwe staaf ’diefstal’ moet staan.

Bij veel gemelde misdrijven is er geen verdachte aangewezen. Is er geen verdachte, dan komt er ook geen strafzaak.
In 1996 werden er door het OM 242 100 strafzaken afgehandeld. In figuur 2 vind je informatie over de manier waarop die afhandeling plaatsvond.

figuur 2 Afhandeling strafzaken in 1996

Strafzaken 242 100			
Vonnissen in de rechtszaal 132 500		Afhandeling door het OM zelf 109 600	
Schuldig 123 200	Niet Schuldig 9 300	Transactie door geldboete 62 200 (Hierbij legt het OM zelf een geldboete op.)	Sepot 47 400 (Hierbij is er geen rechtszaak en ook geen geldboete.)
Geldboete: 39% Celstraf: 35% Taakstraf: 15% Ontzegging rijbevoegdheid: 11%			

4p **4** □ Bereken hoeveel procent van alle 242 100 strafzaken tot een geldboete leidde.

Het aantal strafzaken dat het OM met een transactie afhandelt, groeit elk jaar fors. In 1990 werden 50 000 strafzaken met een transactie afgehandeld. In 1996 waren dat er al 62 200.
Neem aan dat het aantal strafzaken dat met een transactie werd afgehandeld elk jaar met hetzelfde percentage groeide.

5p **5** □ Bereken dit percentage.

Opgave 2 Verwarming

Om een kamer goed te kunnen verwarmen, moet de verwarmingsradiator voldoende capaciteit hebben. Een grote kamer heeft natuurlijk een radiator met een grotere capaciteit nodig dan een kleine kamer.
De verwarmingsinstallateur bepaalt aan de hand van onderstaande tabel hoe groot de capaciteit van een radiator moet zijn. De inhoud van een kamer (vertrek) wordt gegeven in m^3 en de capaciteit van een radiator in Watt.

tabel 1

Benodigde capaciteit in Watt per m^3	vertrekken met 1 buitenmuur			vertrekken met 2 buitenmuren			vertrekken met 3 buitenmuren		
	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3
begane grond	70	60	55	85	70	60	100	80	70
1e verdieping	60	55	50	70	60	50	80	70	60
2e verdieping	70	60	55	85	70	60	100	80	70
badkamers	als voor een normaal vertrek, met een toeslag van 20%								

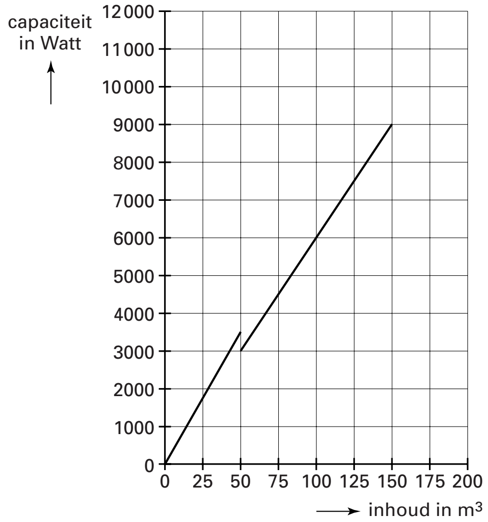
Uit tabel 1 lees je bijvoorbeeld af dat voor een kamer van 40 m^3 op de tweede verdieping met twee buitenmuren een radiator met een capaciteit van $85 \times 40 = 3400$ Watt nodig is.

Iemand heeft nog de oude radiator die geschikt was om de kinderkamer te verwarmen. Hij vraagt zich af of deze radiator geschikt is voor de vernieuwde badkamer.
De kinderkamer van 30 m^3 was op de begane grond en had één buitenmuur.
De badkamer op de eerste verdieping is wel kleiner, de inhoud is maar 24 m^3, maar er zijn twee buitenmuren. En in een badkamer moet het iets warmer zijn dan in andere vertrekken: volgens tabel 1 is daarvoor 20% extra capaciteit nodig.

5p **6** □ Heeft de oude radiator voldoende capaciteit? Licht je antwoord toe.

Vaak worden grafieken gebruikt in plaats van tabellen. De installateur kan dan direct aflezen hoeveel capaciteit een radiator moet hebben. Het is mogelijk om met behulp van tabel 1 zulke grafieken te maken. In figuur 3 is een deel van de grafiek getekend voor *vertrekken met 1 buitenmuur op de begane grond*. De grafiek is getekend voor een inhoud kleiner dan 150 m^3. De figuur staat ook op de bijlage.

figuur 3



In de figuur ontbreekt het deel voor vertrekken met een inhoud tussen 150 en 200 m^3.

4p **7** □ Teken in de figuur op de bijlage dat ontbrekende deel van de grafiek voor vertrekken met één buitenmuur op de begane grond.

Een installatiebureau gebruikt formules om de benodigde capaciteit uit te rekenen. Onderstaande formule is voor vertrekken met één buitenmuur op de begane grond. De formule geldt voor vertrekken waarvan de inhoud niet groter is dan 200 m^3.

$$C = -0{,}12 \cdot I^2 + 70 \cdot I + 315 \qquad \text{met } I \text{ de inhoud in m}^3 \text{ en } C \text{ de capaciteit in Watt}$$

De afgeleide van deze formule is ook alleen geldig voor vertrekken met een inhoud van hoogstens 200 m^3.

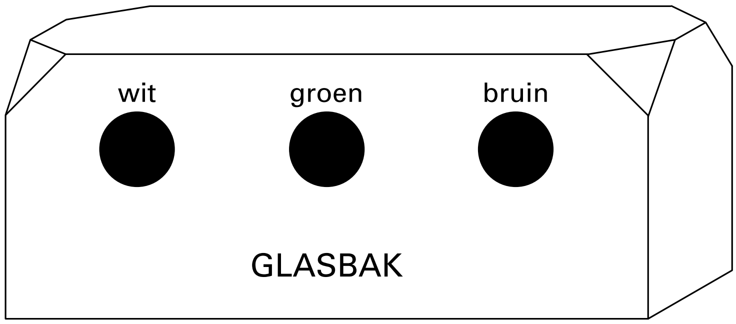
6p **8** □ Toon aan met behulp van de afgeleide dat bij vertrekken met grotere inhoud

- de capaciteit steeds toeneemt, en
- die toename minder sterk is.

Opgave 3 De kleurenblinde en de glasbak

Ongeveer een half miljoen Nederlanders is kleurenblind. Een kleurenblinde ziet (bijna) geen verschil tussen (bepaalde) kleuren.
Gekleurde flessen zijn groen of bruin. Sommige kleurenblinden zien geen verschil tussen groen en bruin. Zij staan met hun lege flessen voor de glasbak en weten niet of ze een gekleurde fles in het gat voor groen glas of in het gat voor bruin glas moeten gooien.

tekening



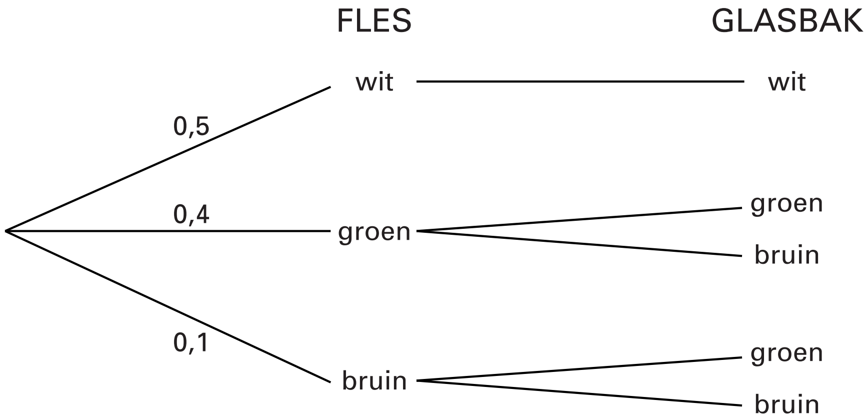
Peter is kleurenblind. Hij kan de groene en de bruine flessen niet van elkaar onderscheiden. Als Peter met zijn lege flessen bij de glasbak komt, gooit hij de witte flessen altijd in het juiste gat. Bij een gekleurde fles kiest hij aselect tussen het gat voor groen en het gat voor bruin. De kans dat een groene of bruine fles in het goede gat terechtkomt is dus 0,5.

Peter brengt 100 lege flessen naar de glasbak. De helft van zijn flessen is van wit glas. Bij de andere helft zijn zowel groene als bruine flessen.

3p **9** □ Laat zien dat naar verwachting 75 van de 100 flessen in het goede gat terechtkomen.

Uit vraag 9 volgt: de kans dat een fles in het goede gat terechtkomt is 75% als Peter de witte flessen altijd goed gooit en bij elke gekleurde fles aselect kiest tussen het gat voor groen en het gat voor bruin.
Uit onderzoek is gebleken dat van de flessen in de glasbak 50% wit, 40% groen en 10% bruin is. Neem aan dat dit ook voor de flessen van Peter geldt.
Je kunt het gooien van de flessen in de glasbak weergeven met een boomdiagram. Zie figuur 4.

figuur 4



Peter kan de kans dat hij een fles in het goede gat gooit, hoger krijgen dan 75%. Hij gooit de witte flessen allemaal in het goede gat. Hij concludeert uit het onderzoek dat van de gekleurde flessen $\frac{4}{5}$ deel groen en $\frac{1}{5}$ deel bruin is. In die verhouding gaat hij de gekleurde flessen in de gaten gooien. Elke gekleurde fles heeft dan kans $\frac{4}{5}$ om in het gat voor groen terecht te komen en kans $\frac{1}{5}$ om in het gat voor bruin terecht te komen.

7p **10** □ Bereken voor deze werkwijze de kans dat een willekeurige fles in het goede gat terechtkomt.

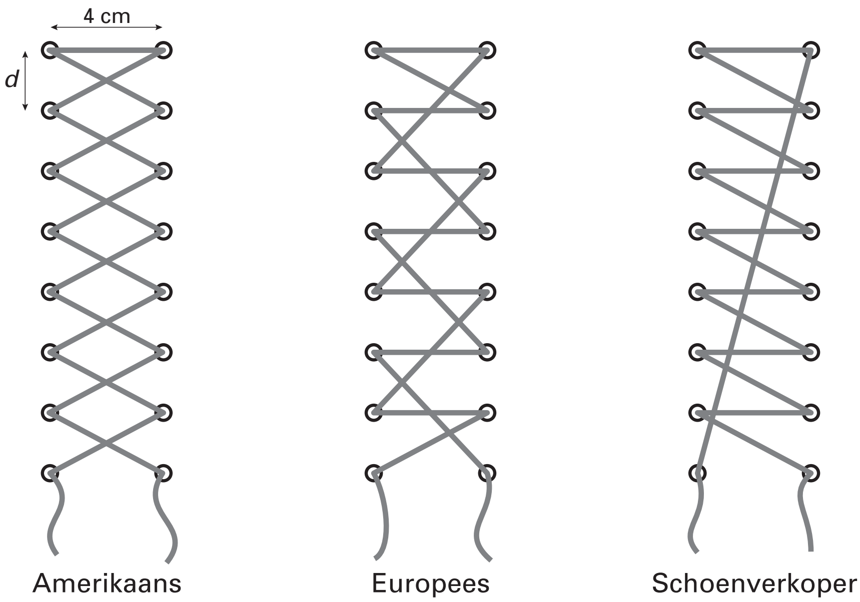
Er bestaan nog betere werkwijzen voor Peter. In zo'n werkwijze is de kans dus nog groter dat een fles in het goede gat terechtkomt.

5p **11** □ Geef een voorbeeld van zo'n werkwijze en toon aan dat deze beter is.

Opgave 4 Schoenveters

De meeste schoenen worden met veters dichtgemaakt. De schoen heeft dan twee rijen gaatjes waar een veter doorheen gehaald moet worden. Als je daarna een knoop legt in de overblijvende stukken, zit de schoen dicht.
In deze opgave bekijken we drie manieren om schoenveters te rijgen: Amerikaans (zigzag), Europees (recht) en Schoenverkoper (snel). Zie figuur 5.

figuur 5



Voor schoenen met drie paar gaatjes is er iets bijzonders aan de hand: twee van de drie manieren van rijgen geven hetzelfde resultaat.

4p **12** □ Maak voor elk van de drie manieren van rijgen een schets, zoals in figuur 5, en laat daarmee zien welke twee manieren hetzelfde resultaat geven.

Bij elk van de drie genoemde manieren van rijgen hoort een formule voor de benodigde veterlengte. Daarbij laten we het deel van de veter waar de knoop in komt buiten beschouwing, omdat dat deel voor elke manier van rijgen even lang is.
Voor de veterlengte l gelden dan de volgende formules.

Amerikaans: $l = 4 + 2(n-1) \cdot \sqrt{d^2 + 16}$

Europees: $l = 4(n-1) + 2\sqrt{d^2 + 16} + (n-2) \cdot \sqrt{4d^2 + 16}$

Schoenverkoper: $l = 4(n-1) + (n-1) \cdot \sqrt{d^2 + 16} + \sqrt{(n-1)^2 \cdot d^2 + 16}$

Hierbij is n het aantal paren gaatjes en d de afstand tussen de opeenvolgende gaatjes. De veterlengte l en de afstand d zijn in centimeters. Voor de formules is de afstand tussen de linker- en rechtergaatjes op 4 cm gesteld. De formules gelden voor schoenen met ten minste twee paar gaatjes.

Ga uit van een schoen met acht paar gaatjes, waarbij de afstand tussen de opeenvolgende gaatjes 1,8 cm is.

5p **13** □ Bereken het verschil in veterlengte l tussen de manieren Europees en Schoenverkoper.

Een fabrikant maakt een model schoenen in de maten 38 tot en met 45. Om de veters te rijgen gebruikt hij de Amerikaanse manier.
Voor schoenmaat 38 geldt $n = 6$ en $d = 1{,}5$. De totale afstand tussen het eerste paar en het laatste paar vetergaatjes is dan 7,5 cm.
Bij een grotere schoenmaat moet die afstand 9 cm worden. Daarvoor kan de fabrikant kiezen uit twee mogelijkheden:
I één paar vetergaatjes erbij;
II geen paar vetergaatjes erbij, maar de afstand d vergroten.

5p **14** □ Bereken het verschil in veterlengte l tussen beide mogelijkheden.

Naar aanleiding van het resultaat van vraag 14 besluit de fabrikant het model in elke maat met 6 paar vetergaatjes te maken (dus $n = 6$). Voor de fabrikant wordt de formule dan:

Amerikaans: $l = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}$

Om de stevigheid rond de voet te garanderen bij grotere schoenmaten maakt de fabrikant de afstand tussen de vetergaatjes volgens tabel 2.

tabel 2

Schoenmaat	38	39	40	41	42	43	44	45
d (in cm)	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2

Voor een fatsoenlijke knoop is bij dit type schoen ten minste 42 cm extra veter nodig.

4p **15** □ Onderzoek bij welke schoenmaten je een veter van 90 cm kunt gebruiken. Licht je antwoord toe.

Voor de andere twee manieren om schoenveters te rijgen, luiden de formules voor de veterlengte van schoenmodellen met zes paar vetergaatjes ($n = 6$) als volgt:

Europees: $l = 20 + 2\sqrt{d^2 + 16} + 4\sqrt{4d^2 + 16}$

Schoenverkoper: $l = 20 + 5\sqrt{d^2 + 16} + \sqrt{25d^2 + 16}$

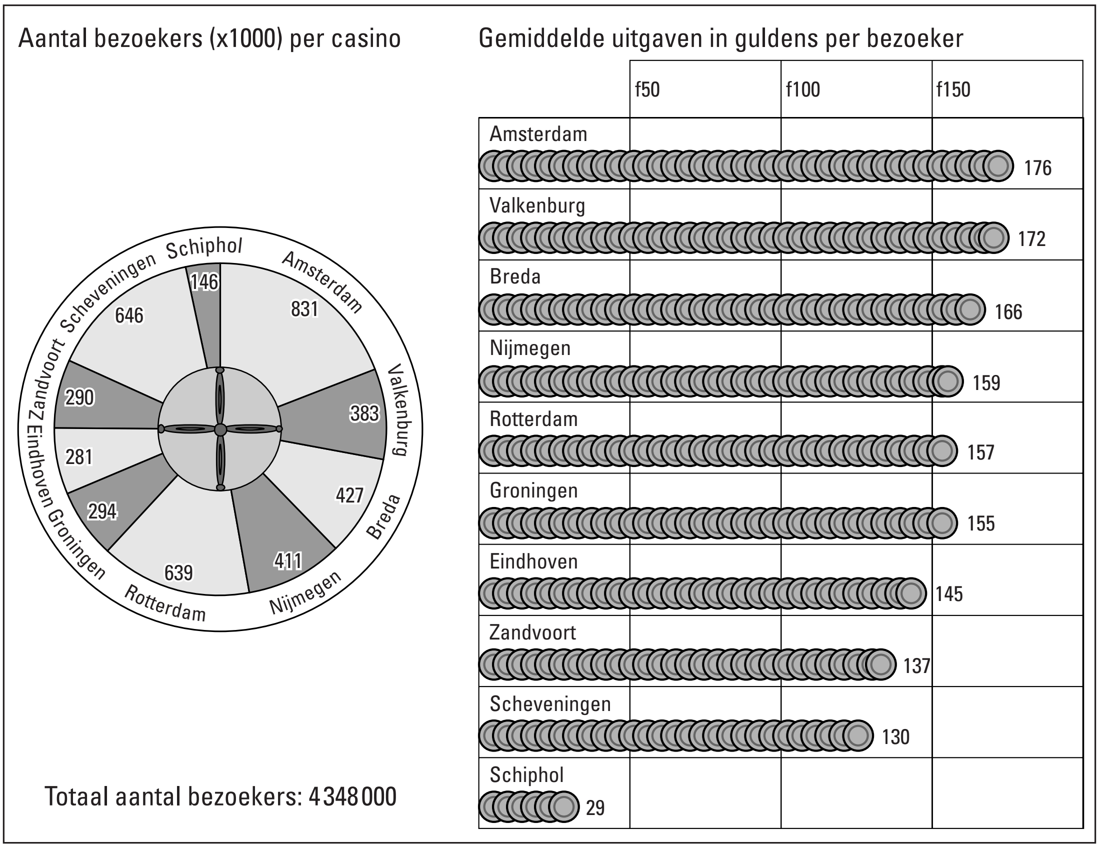
De fabrikant wil zo kort mogelijke veters in de schoenen doen, want kortere veters zijn goedkoper. Daarbij zijn er drie mogelijke manieren van rijgen: Amerikaans, Europees en Schoenverkoper.

4p **16** □ Is er een manier van rijgen die voor alle schoenmaten van tabel 2 het goedkoopst is? Zo ja, welke? Licht je antwoord toe.

Opgave 5 Casino

Holland Casino exploiteert in Nederland een aantal casino's. Elk jaar brengt zij verslag uit over de resultaten van het afgelopen jaar. Onderstaande figuur 6 is gebaseerd op cijfers uit het jaarverslag over 1995.

figuur 6



In deze figuur lezen we onder andere dat Nederlands grootste casino, het casino in Amsterdam, dat jaar 831 000 bezoekers trok. Zij gaven daar gemiddeld 176 gulden uit. Dat is vrij veel, want in heel Nederland was het gemiddelde ongeveer 153 gulden.

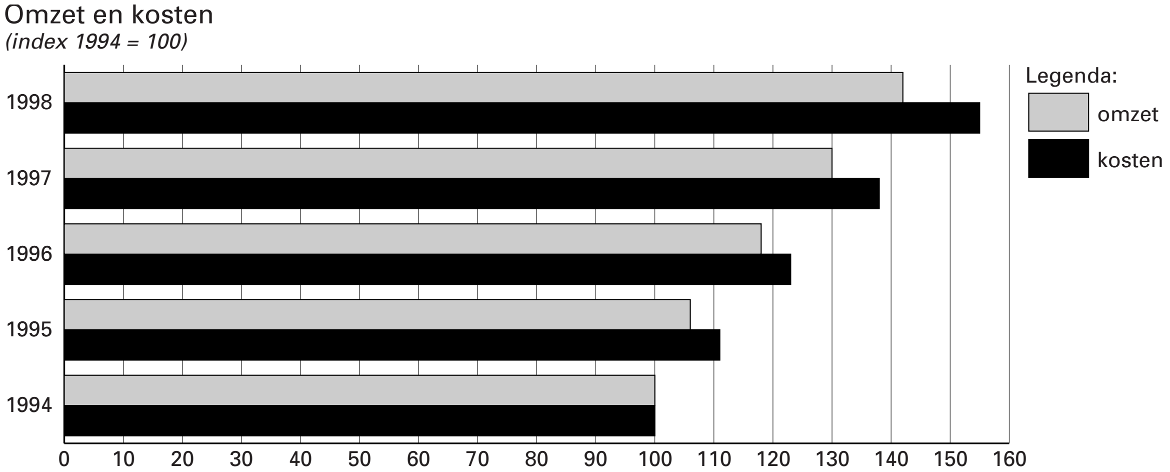
5p **17** □ Toon aan met behulp van de gegevens in figuur 6 dat het Nederlandse gemiddelde inderdaad ongeveer 153 gulden was.

In het weekend is het in de casino's het drukst. Ruim 22% van alle bezoekers komt op zaterdag. We gaan er van uit dat het bezoekersaantal op zaterdag van het Amsterdamse casino normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3500 bezoekers en een standaardafwijking van 350 bezoekers.
Als er meer dan 3000 bezoekers zijn, noemt de bedrijfsleiding het *gezellig druk*.

5p **18** □ Bereken hoeveel zaterdagen in een jaar het naar verwachting gezellig druk is in het Amsterdamse casino. Neem aan dat het jaar 52 zaterdagen heeft.

Figuur 7 komt uit het jaarverslag over 1998 van Holland Casino.

figuur 7



'Index 1994 = 100' betekent dat alle bedragen vergeleken zijn met de bedragen van 1994.
Zo heeft de omzet in 1996 het indexcijfer 118. De omzet in 1996 was dus 118% van die in 1994. De omzet steeg tussen 1994 en 1996 dus met 18%.
Uit figuur 7 zou je kunnen concluderen dat de kosten sterker stijgen dan de omzet. Dat zou geen goede ontwikkeling zijn. De winst is immers de omzet min de kosten.

4p **19** □ Geef een getallenvoorbeeld waarmee je laat zien dat het met de gegevens uit figuur 7 toch mogelijk is dat de winst in de periode 1994–1998 gestegen is.

In het casino kun je onder andere spelen aan de roulettetafels. Bij dit spel brengt de bankhouder (de croupier) een ronde schijf aan het draaien waarop 37 genummerde vakjes zitten. De vakjes zijn genummerd van 0 tot en met 36. Dan werpt hij een klein balletje in tegengestelde richting langs de rand van de schijf. Na enige tijd valt het balletje in één van de 37 vakjes. Het nummer van dat vakje is het winnende getal. Voor elk van de 37 vakjes is de kans dat het balletje daarin valt gelijk.

Hans speelt op een avond de hele tijd alleen op het getal 7, want dat is zijn geluksgetal. Als de 7 niet wint, vindt hij dat niet zo erg. Maar als het balletje wel een keer in het vakje met nummer 7 valt, is zijn hele avond goed. Die avond draait de roulette 250 keer.

4p **20** □ Bereken de kans dat het balletje die avond ten minste één keer in het vakje met nummer 7 valt.

Einde