

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.  
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.  
Voor de uitwerking van de vragen 3, 6, 7, 8, 12 en 21 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Duikend

Op het IJsselmeer overwinteren grote groepen duikeenden. Ze leven van mosselen die daar veel op de bodem voorkomen.

Duikenden slikken hun mosselen met schelp en al in. Bij elke duik slikt de eend behalve een mossel dus ook onverteerbaar schelpmateriaal en water in, alles bij elkaar ongeveer 6 gram. Zo'n hap bevat maar 5% mosselvlees. De dagelijkse behoefte van een duikend is ongeveer 120 gram mosselvlees.

- 3p 1  Hoe vaak moet een eend duiken om zijn dagelijkse portie mosselvlees binnen te krijgen? Licht je antwoord toe.

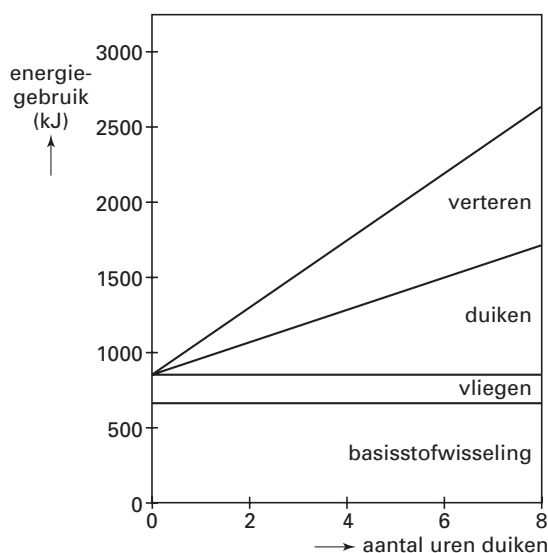
Het gedrag van duikeenden is volledig gericht op het verzamelen van voedsel. Alle voedingsstoffen en energie die ze nodig hebben, halen ze uit de mosselen.

De energiehuishouding van een duikend is ingewikkeld. Aan de ene kant moeten de mosselen de benodigde energie leveren, aan de andere kant kost het opduiken en verteren van mosselen energie.

Ook als een eend op een dag niet naar mosselen zou duiken, gebruikt hij een vaste hoeveelheid energie voor zijn basisstofwisseling en het vliegen, samen ongeveer 850 kJ.

In figuur 1 is te zien dat de totale hoeveelheid energie die een duikend gebruikt, afhankelijk is van het aantal uren dat hij naar mosselen duikt.

figuur 1



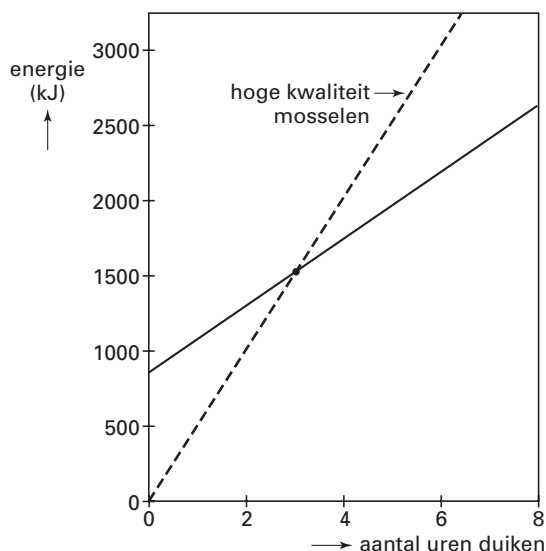
Als een eend op een dag bijvoorbeeld 5 uur lang naar mosselen duikt, gebruikt hij die dag in totaal bijna 2000 kJ. Dat is de vaste hoeveelheid van 850 kJ, met daarbij opgeteld een hoeveelheid die afhankelijk is van het aantal uren dat de eend naar mosselen duikt: voor het duiken zélf en voor het verteren van de opgedoken koude mosselen daarna.

- 4p 2  Hoeveel energie gebruikt een duikend per uur duiken voor alleen het verteren van de mosselen? Licht je antwoord toe.

Dicht aan de kust zitten de mosselen van hoge kwaliteit, met veel vlees. Halverwege de winter hebben de duikeenden al die mosselen opgegeten. Ze moeten dan verder het IJsselmeer op, waar het water dieper is en waar de mosselen minder vlezig zijn. Per duik krijgen ze dan minder mosselvlees binnen.

Figuur 1 gaat over de energie die een duikend *gebruikt*. Figuur 2 gaat ook over de energie die een duikend *opneemt* uit de mosselen. Figuur 2 staat vergroot op de bijlage.

figuur 2



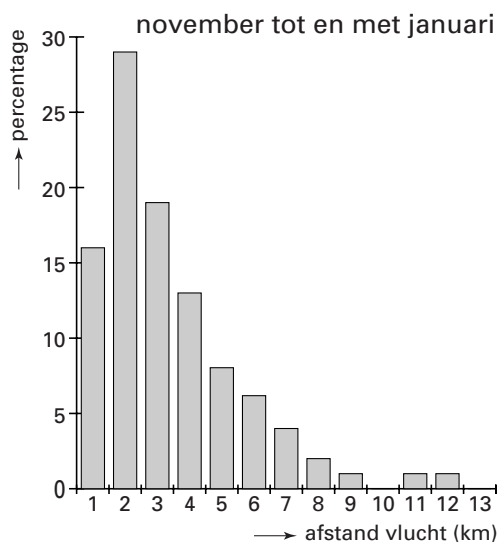
De getrokken lijn in figuur 2 is overgenomen uit figuur 1 en geeft het totale energiegebruik aan. De stippellijn geeft de energieopname uit mosselen van hoge kwaliteit aan. Om aan zijn dagelijkse energiebehoefte te voldoen, moet een eend naar mosselen duiken. Door dat duiken neemt zijn energiebehoefte toe. Na een aantal uur duiken (bij het snijpunt van de lijnen) is er evenwicht: er wordt evenveel energie opgenomen als er wordt gebruikt. De eend moet dus ongeveer 3 uur duiken om aan zijn energiebehoefte te voldoen.

In het tweede deel van de winter verandert dat. De mosselen van lage kwaliteit die de eenden dan opduiken, leveren minder energie. Eén uur duiken levert dan geen 500 kJ op, zoals bij mosselen van hoge kwaliteit, maar slechts 350 kJ.

5p **3**  Onderzoek met behulp van de figuur op de bijlage hoeveel uur de eenden moeten duiken naar mosselen van lage kwaliteit om volledig in hun energiebehoefte te voorzien.

Met behulp van radar is gemeten hoe ver de eenden vliegen naar hun voedselplaatsen. Voor de maanden november tot en met januari staan die vliegafstanden in figuur 3. Elke staaf geeft voor een bepaalde afstand het percentage eenden aan dat die afstand heeft afgelegd om bij de voedselplaats te komen. Voor de maanden februari tot en met april staan de gegevens in tabel 1.

figuur 3



tabel 1

februari tot en met april	
afstand vlucht (km)	percentage
1	5
2	14
3	13
4	16
5	9
6	12
7	8
8	6
9	5
10	3
11	4
12	3
13	2

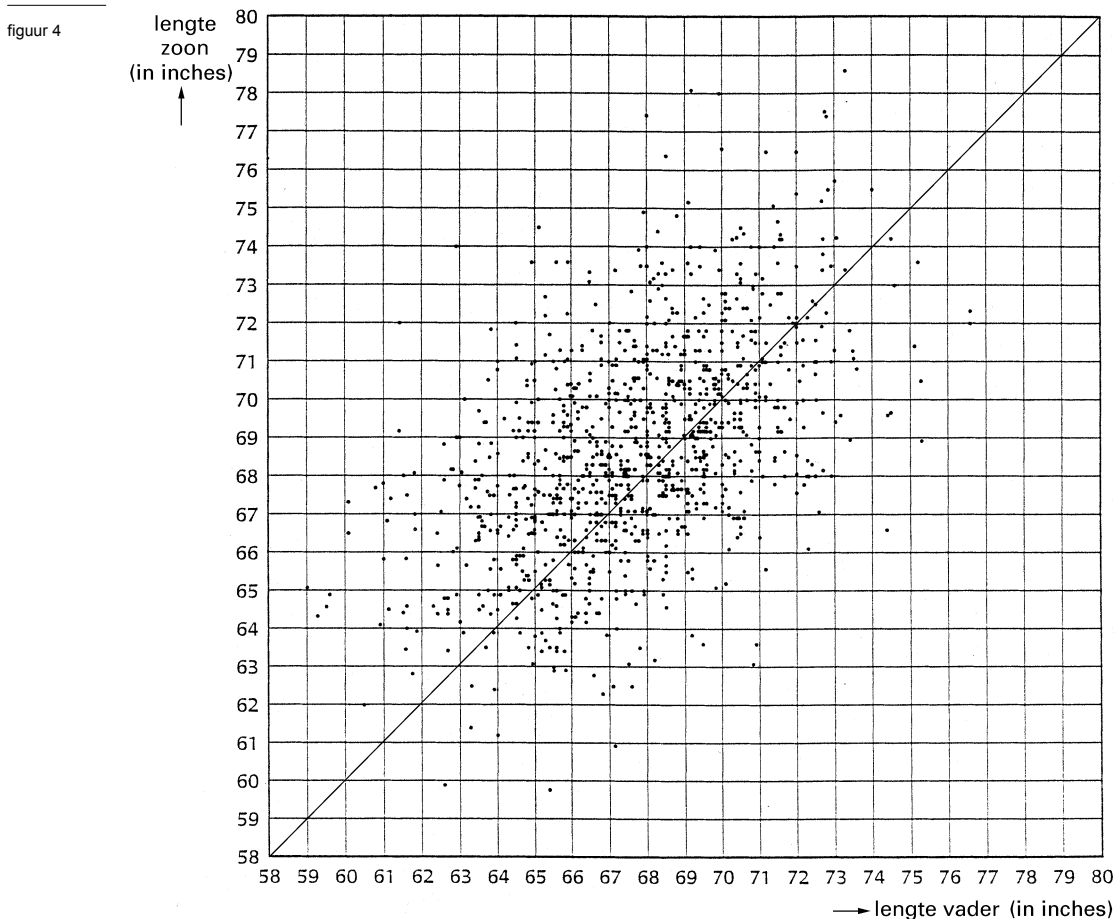
6p **4**  Bereken het verschil tussen de gemiddelde afstand van de vluchten van november tot en met januari en de gemiddelde afstand van de vluchten van februari tot en met april.

## Vaders en zonen

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak bezig gehouden met statistiek over biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londense universiteit.

2p **5**  Is hier sprake van een aselechte steekproef? Licht je antwoord toe.

In figuur 4, die ook op de bijlage staat, zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt één vader-zoon-paar voor. De lengte van de vader staat op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn gegeven in inches (1 inch = 2,54 cm).



In de figuur is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, dan zijn de vader en de zoon *precies even lang*.

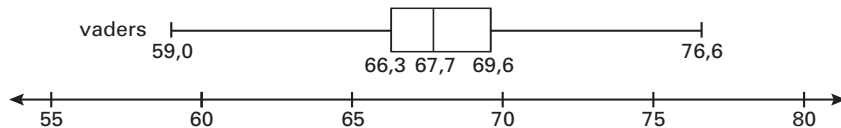
We noemen een vader en zijn zoon *ongeveer even lang* als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.

4p **6**  Teken in de figuur op de bijlage het gebied waarin de punten liggen die horen bij vaders en zonen die *ongeveer even lang* zijn. Licht je werkwijze toe.

3p **7**  Kun je met behulp van het in vraag 6 getekende gebied concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.

In figuur 5 zie je een boxplot van de lengtes van de 1064 vaders. De vijf kenmerkende getallen van de boxplot staan erbij. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 5



Op de bijlage vind je ook een lijst met de lengtes van alle 1064 zonen. De getallen in deze lijst staan op volgorde van grootte. Na iedere 10 getallen staat een streepje. Na iedere 50 getallen staat bij het streepje hoeveel getallen er tot daar staan.

- 5p **8**  Teken de boxplot van de lengtes van de zonen in de figuur op de bijlage boven de boxplot van de vaders. Schrijf de vijf kenmerkende getallen van de boxplot erbij.

Het onderzoek dat bovenstaande getallen opleverde, is ongeveer honderd jaar geleden gedaan. In die tijd hadden jonge mannen een gemiddelde lengte van 68,6 inch. Dat is niet zo groot want 68,6 inch is maar 174 cm (1 inch = 2,54 cm).

Tegenwoordig is de helft van de jonge mannen langer dan 182 cm.

Honderd jaar geleden was veel minder dan de helft van de jonge mannen zo lang. De lengte was toen normaal verdeeld met een gemiddelde van 68,6 inch en een standaardafwijking van 2,7 inch.

- 5p **9**  Bereken hoeveel procent van de jonge mannen in die tijd langer was dan 182 cm.

## Teddyberen

Een speelgoedfabriek maakt onder andere teddyberen. Die teddyberen worden voor 6 euro per stuk verkocht aan de groothandel. In deze opgave bekijken we de productie en de winst van één dag.

Om de winst  $W$  te berekenen, moeten de totale kosten voor het produceren van de teddyberen  $TK$  van de totale opbrengst  $TO$  worden afgetrokken:  $W = TO - TK$ .

De totale kosten die gemaakt worden om de teddyberen te produceren, hangen af van het aantal teddyberen dat geproduceerd wordt. De totale opbrengst hangt ook alleen af van het aantal geproduceerde teddyberen, want de prijs is steeds 6 euro.

Voor  $TK$  en  $TO$  gelden de volgende formules:

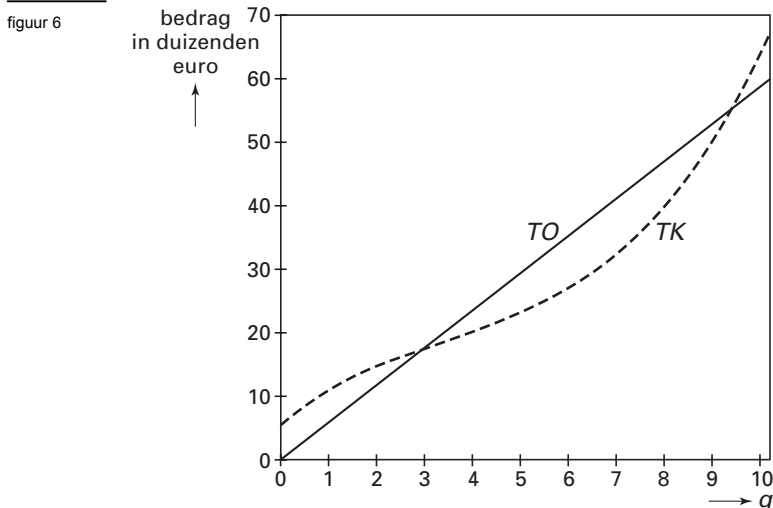
$$TK = 0,1q^3 - q^2 + 6q + 6$$

$$TO = 6q$$

Hierbij zijn  $TK$  de totale kosten en  $TO$  de totale opbrengst, beide in *duizenden* euro, en is  $q$  het aantal geproduceerde teddyberen in *duizendtallen*.

- 3p **10** □ Bereken de winst in euro bij een productie van 5000 teddyberen.

In figuur 6 zijn de grafieken getekend van de totale kosten  $TK$  en de totale opbrengst  $TO$ .



De grafieken zijn getekend voor  $q = 0$  tot  $q = 10$ , dus voor een productie tot 10 000 teddyberen. In de figuur kun je zien dat er geen winst gemaakt wordt bij een te grote of te kleine productie.

- 4p **11** □ Bereken bij welke aantallen geproduceerde teddyberen de speelgoedfabriek geen winst of verlies maakt. Geef je antwoord in een geheel aantal teddyberen.

De fabriek wil zo veel mogelijk winst maken. Op de bijlage staat figuur 6 vergroot weergegeven. In die figuur kun je nagaan door tekenen en aflezen bij welke productie de winst maximaal is.

- 3p **12** □ Gebruik de figuur op de bijlage om te schatten bij welke productie de winst maximaal is. Licht je werkwijze toe aan de hand van wat je op de bijlage hebt getekend.

Je kunt ook berekenen bij welke productie de winst maximaal is door de formule voor de winst  $W$  te differentiëren.

- 6p **13** □ Stel de afgeleide van  $W$  op en bereken daarmee de productie waarbij de winst maximaal is. Geef je antwoord in een geheel aantal teddyberen.

Om de verkoop van zijn knabbelchips te bevorderen is een chipsfabrikant een reclameactie gestart waarbij in elke zak één vlippo wordt gestopt. Dat is een plastic schijfje waar een leuk plaatje op staat. Er worden verschillende vlippo's voor deze actie gebruikt. Sommige mensen proberen al deze vlippo's te verzamelen. De kans dat je een bepaalde vlippo in een zak knabbelchips aantreft, is voor alle verschillende vlippo's even groot.

We gaan eerst uit van de situatie waarin de fabrikant maar twee verschillende vlippo's gebruikt. Een vlippoverzamelaar heeft vier zakken knabbelchips gekocht.

- 4p **14** □ Bereken de kans dat de vlippo's in deze vier zakken allemaal hetzelfde zijn.
- 4p **15** □ Bereken de kans dat de vlippoverzamelaar pas bij het openen van de derde zak de twee verschillende vlippo's te pakken heeft.

We bekijken nu de situatie waarin de chipsfabrikant vijf verschillende vlippo's gebruikt. Een vlippoverzamelaar beweert dat hij dan maar vijf zakken knabbelchips hoeft te kopen om de vijf verschillende vlippo's daarin aan te treffen. Zijn vriend is het daar niet mee eens. De eerste zak levert natuurlijk altijd een vlippo op die je nog niet hebt, maar de kans dat er in de tweede zak ook een vlippo zit die je nog niet hebt, is maar  $\frac{4}{5}$ . En daarna wordt de kans steeds kleiner.

- 4p **16** □ Bereken met behulp van bovenstaande redenering de kans dat je in vijf zakken de vijf verschillende vlippo's aantreft.

We bekijken nog een voorbeeld.

Als er in totaal 8 verschillende vlippo's zijn, dan zou het natuurlijk leuk zijn als je die alle 8 hebt na het kopen van precies 8 zakken knabbelchips.

De kans dat zo iets gebeurt, is klein.

Wiskundigen hebben uitgerekend dat de kans daarop is:  $\frac{8!}{8^8} \approx 0,002$ .

Er is ook een formule voor het algemene geval.

Er zijn dan  $n$  verschillende vlippo's.

De kans  $P$  dat je die alle  $n$  hebt na het kopen van precies  $n$  zakken knabbelchips wordt gegeven door de formule:

$$P = \frac{n!}{n^n}$$

Hoe groter het aantal verschillende vlippo's  $n$  wordt, hoe kleiner die kans  $P$ .

De chipsfabrikant wil wel zo veel mogelijk verschillende vlippo's, maar hij zorgt er voor dat de kans  $P$  groter is dan 0,00001.

- 4p **17** □ Hoeveel verschillende vlippo's kan de chipsfabrikant dan maximaal gebruiken? Licht je antwoord toe.

## Bonus-malusladder

Iedereen die in Nederland een auto heeft, is verplicht die te verzekeren.

Verzekeringsmaatschappijen letten bij het vaststellen van de hoogte van de verzekeringspremie onder andere op de nieuwprijs van de auto. Hiermee stellen ze de *basispremie* voor de verzekering vast.

De basispremie is hoog, maar kan snel dalen wanneer de verzekeringsmaatschappij voor jou geen schade hoeft te betalen. Je krijgt dan het volgende jaar als beloning een korting op je premie, een *bonus*. Wanneer je de verzekeringsmaatschappij wel een schade laat betalen wordt je premie het volgende jaar verhoogd met een boete, een *malus*.

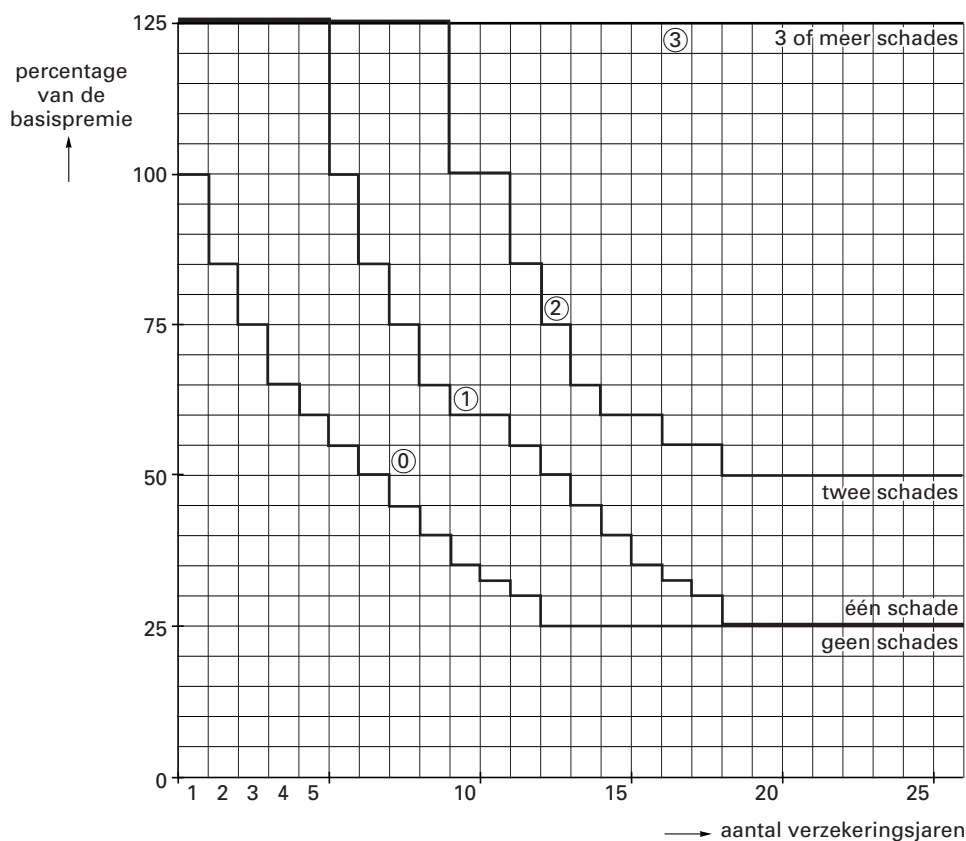
In figuur 7 zie je hoe een verzekeringsmaatschappij dit systeem gebruikt om de premies vast te stellen. We noemen zo'n figuur een bonus-malusladder.

In de figuur staan vier grafieken. De onderste grafiek hoort bij een autobezitter voor wie de verzekeringsmaatschappij nooit een schade heeft betaald. Iedereen begint op deze grafiek.

Elke keer dat je een schade door de verzekeringsmaatschappij laat betalen, maakt je premie in het volgende verzekeringsjaar een sprong naar de grafiek erboven. Je ziet hier dat iemand die twee schades heeft laten betalen, in zijn 14e verzekeringsjaar 65% van de basispremie betaalt.

figuur 7

### Bonus-malusladder



Karin heeft altijd zonder schade gereden maar veroorzaakt in het zevende verzekeringsjaar een aanrijding waarvoor zij haar verzekeringsmaatschappij de schade laat betalen. Daarom volgt zij vanaf haar achtste verzekeringsjaar grafiek 1. Haar basispremie is 710 euro.

3p 18 □ Hoeveel premie moet Karin in haar achtste verzekeringsjaar méér betalen dan in haar zevende? Licht je antwoord toe.



- Albert is al zes jaar verzekerd bij de maatschappij van figuur 7. Zijn basispremie is 800 euro. De verzekeringsmaatschappij heeft in het vierde jaar voor Albert een schade betaald.
- 3p **19**  Bereken de gemiddelde jaarlijkse verzekeringspremie die Albert in deze periode van zes jaar betaald heeft.

Sinds zij haar auto verzekerd heeft, heeft Mirjam nog nooit een schade gehad. In het 13e verzekeringsjaar veroorzaakt zij een schade van 320 euro. Haar basispremie is 700 euro. Zij moet kiezen uit twee mogelijkheden:

- I ze betaalt de schade zelf en houdt nul schades bij de verzekering;  
II ze laat de verzekeringsmaatschappij de schade betalen en accepteert de hogere premie.

Ze gaat ervan uit dat zij de eerstvolgende vijf jaar geen schade zal hebben. Ze wil zo weinig mogelijk geld uitgeven.

- 5p **20**  Adviseer je haar I of II? Licht je antwoord toe.

Je wilt een verzekering voor je auto afsluiten. Je vraagt bij verschillende maatschappijen een overzicht van hun premies bij het rijden zonder schade. Eén van de maatschappijen berekent voor jou een basispremie van 600 euro en geeft je een tabel met zogeheten cumulatieve premies. Zie tabel 2. In de tabel lees je bijvoorbeeld af dat je voor een verzekeringsperiode van 2 jaar in totaal 1050 euro premie moet betalen. Voor 3 jaar kost het je in totaal 1410 euro, enzovoort.

tabel 2

### Cumulatieve premie in euro bij het rijden zonder schade

verzekeringsjaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cumulatieve premie	600	1050	1410	1710	1950	2130	2250	2370	2490	2610

Om deze verzekering met andere te kunnen vergelijken is het handig om met behulp van de gegevens van tabel 2 een grafiek te maken zoals de onderste grafiek in figuur 7.

- 4p **21**  Teken deze grafiek in de figuur op de bijlage. Licht je werkwijze toe.

**Einde**