wiskunde A1,2

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20**05**

Tijdvak 2
Woensdag 22 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen; het examen bestaat uit 22 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 3 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

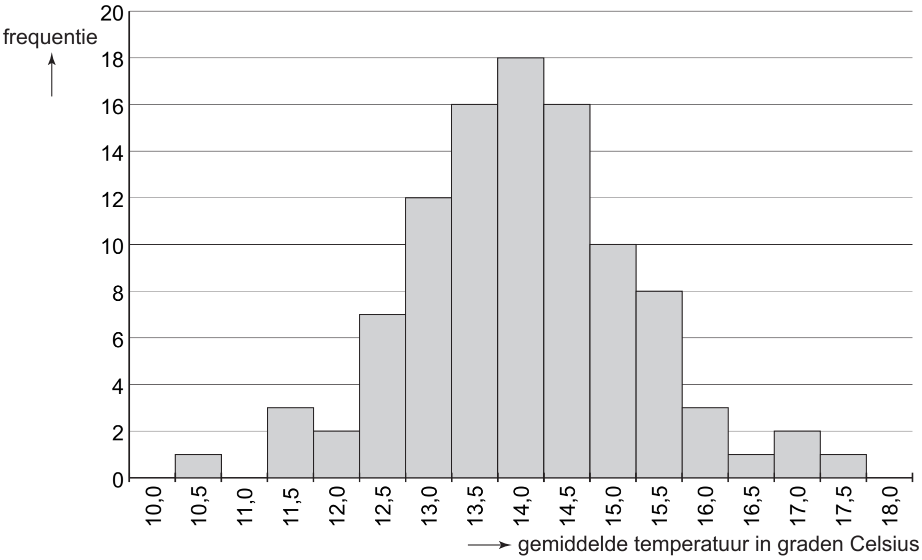
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Het weer in september

Al heel lang worden bij het KNMI in De Bilt metingen verricht aan het weer.
In deze opgave kijken we naar gegevens over het weer in de maand september.

Gemiddelde temperatuur
In het staafdiagram in figuur 1 zijn de gemiddelde temperaturen van de maand september van de jaren 1901 tot en met 2000 weergegeven. Hierbij is afgerond op halve graden.

figuur 1



4p **1** ☐ Bereken van deze 100 temperaturen het gemiddelde.

Neerslag
In het steel-blad-diagram in figuur 2 is de hoeveelheid neerslag van de maand september van de jaren 1901 tot en met 2000 weergegeven. Je ziet hierin bijvoorbeeld dat er twee jaren zijn geweest met 68 mm neerslag in de maand september en dat er zelfs een septembermaand is geweest met 213 mm neerslag.
Het steel-blad-diagram staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2 **De hoeveelheid neerslag in de septembermaanden van 1901 tot en met 2000**

0	3	11	0 0 5 6
1	0 3 8	12	1 9
2	1 4 4 4 6 7 8 9	13	9
3	2 2 3 4 4 6 6 6 7 9 9 9	14	2 6 9
4	0 0 0 0 1 2 3 3 3 4 9 9	15	5
5	0 2 2 3 4 5 7 9 9	16	
6	1 3 4 5 6 7 8 8 9	17	
7	0 1 1 2 3 3 7 9 9 9	18	6
8	0 1 1 2 2 3 5 6 6	19	
9	0 3 4 5 6 7 7	20	
10	1 1 3 4 9 9	21	1 3

4p **2** ☐ Hoe groot is de modus en hoe groot is de mediaan van de neerslag in dit steel-blad-diagram? Licht je antwoorden toe.

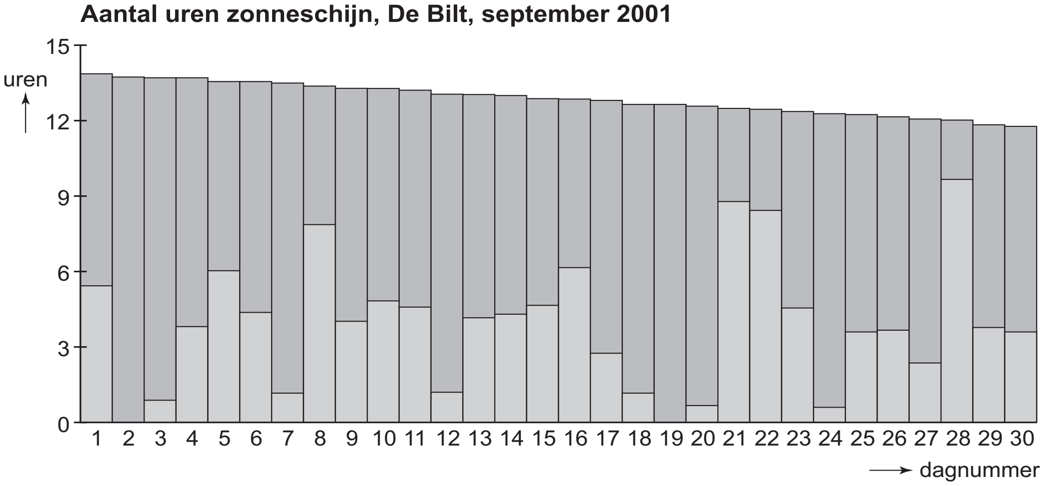
Op de uitwerkbijlage staat onder het steel-blad-diagram een schaalverdeling. Boven die schaalverdeling is ruimte voor een boxplot van de neerslag in de septembermaanden van 1901 tot en met 2000.

5p **3** ☐ Teken op de uitwerkbijlage deze boxplot. Omcirkel in het steel-blad-diagram de getallen die je hebt gebruikt voor het tekenen van de boxplot.

Zonneschijn in september 2001

In het staafdiagram van figuur 3 geeft de totale lengte van een staaf aan hoe lang de zon kan schijnen op een heldere dag.
Door bewolking is het werkelijke aantal uren zonneschijn kleiner. Het lichtere deel van de staaf geeft aan hoe lang de zon die dag werkelijk scheen.
Horizontaal staan de dagen van de maand, verticaal staat het aantal uren zonneschijn.

figuur 3



De grijze staven worden steeds korter omdat de zon steeds later opkomt en eerder ondergaat. Op 1 september (dagnummer 1) is het mogelijke aantal uren zonneschijn 13,7. Op 30 september (dagnummer 30) is dat aantal 11,7.
Er is vrijwel sprake van een lineair verband tussen het dagnummer d en het mogelijke aantal uren zonneschijn z. Je kunt dus een formule opstellen van de vorm:

$$z = a \cdot d + b$$

3p **4** ☐ Bereken a en b. Geef beide antwoorden in twee decimalen.

Jurassic Park

foto

Nog regelmatig worden er in oude aardlagen skeletonderdelen en voetsporen aangetroffen van dinosauriërs. Zie de foto.
Uit de voetsporen kunnen we zelfs achterhalen hoe snel die dinosauriërs daar liepen. Deze snelheid hangt af van de afstand tussen de voetsporen, *de paslengte*, en van de grootte van de dinosaurus die het voetspoor achterliet. Doordat soms hele skeletten gevonden zijn, weten we hoe groot zo'n dier geweest is.

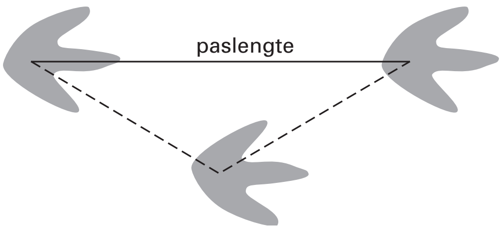
De biomechanicus R. McNeill Alexander heeft van een groot aantal diersoorten de relatie tussen paslengte, snelheid en grootte bepaald. Uit zijn onderzoek is een formule afgeleid die een goede schatting geeft voor de snelheid van dieren:

$$v = 2{,}81 \cdot s^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}17}$$

Hierin is:
- v de snelheid *in kilometer per uur*;
- s de paslengte *in meter*, de afstand tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet (zie figuur 4);
- h de heuphoogte *in meter*.

De formule geldt voor zowel twee- als viervoeters, zowel groot als klein, dus ook voor katten en honden.

figuur 4



Op een mooie winterdag staan er voetsporen in de sneeuw in de tuin. Deze zijn afkomstig van de kat van de buren, die een heuphoogte heeft van 21 cm. Uit de voetsporen blijkt dat de paslengte 35 cm is.

3p **5** ☐ Bereken de snelheid van de kat toen zij die voetsporen achterliet.

De buurman, die van het onderzoek gehoord had, werd nieuwsgierig en ging een middagje fietsen met zijn hond. Het beest bleef keurig naast hem rennen, bij elke snelheid die hij fietste.
Volgens de buurman had zijn hond een paslengte van ongeveer anderhalve meter, toen de snelheidsmeter 15 km/uur aangaf. De heuphoogte van zijn hond is 40 cm.

3p **6** ☐ Bereken de paslengte van de hond in cm nauwkeurig.

foto

Neem aan dat de formule van McNeill Alexander ook geldt voor dinosauriërs.
Een vuistregel voor dinosauriërs is:
de hoogte h van de heup is viermaal de lengte l van de voetafdruk, ofwel
$h = 4 \cdot l$, met h en l beide in meter.

Van een Brontosaurus zijn voetafdrukken gevonden met een lengte van 91 cm.
De bijbehorende paslengte is 3,5 meter.

3p **7** □ Bereken de snelheid van deze Brontosaurus toen hij deze voetafdrukken achterliet.

Uit de verbanden $v = 2{,}81 \cdot s^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}17}$ en $h = 4 \cdot l$ kan het volgende verband worden afgeleid:

$$v = c \cdot s^{1{,}67} \cdot l^{-1{,}17}$$

Hierin is c een constante.

4p **8** □ Bereken c. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Meestal komt de snelheid bij dinosauriërs niet boven de 10 km/uur uit. Maar sommige voetsporen van snelrennende vleesetende dinosauriërs, zoals de Tyrannosaurus Rex, laten een hogere snelheid zien. Op dit moment houdt men voor de topsnelheid van de Tyrannosaurus Rex een snelheid van 20 km/uur aan. In de film Jurassic Park achtervolgt een exemplaar van deze soort een hard rijdende jeep, maar dat is dus onmogelijk.
Er bestaat een voetspoor van een Tyrannosaurus Rex waarin de paslengte 4,5 meter bedraagt. Volgens de formule liep hij toen met een snelheid van 16,5 km/uur.

4p **9** □ Bereken de lengte van de voetafdruk van deze dinosauriër.

Voor een vaste heuphoogte van 2,5 meter is de formule van McNeill Alexander te herschrijven tot het volgende verband:

$$v = 0{,}962 \cdot s^{1{,}67}$$

De snelheid v is dan slechts afhankelijk van de paslengte s.

4p **10** □ Bereken de gemiddelde snelheidsverandering $\frac{\Delta v}{\Delta s}$ als de paslengte s in een voetspoor toeneemt van 2,0 meter tot 2,5 meter.

3p **11** □ Stel de afgeleide v' van v op en bereken de waarde van v' als $s = 2{,}25$ meter.

Het HABOG

Kernenergie levert weinig afval op, maar het is wel afval dat speciale aandacht vereist. Het is namelijk radioactief en het blijft nog tientallen jaren warmte afgeven.
In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waar de komende honderd jaar kernafval zal worden opgeslagen. Het gebouw heet HABOG, Hoogradioactief Afval Behandelings- en Opslag Gebouw. In het HABOG wordt het afval van de kerncentrale van Borssele opgeslagen.
Over honderd jaar zijn de radioactiviteit en de warmte van het afval zo veel afgenomen dat het afval op een andere plaats kan worden opgeslagen.

foto

Het afval uit Borssele bestaat jaarlijks uit zes glasblokken met hoogradioactief afval.
In het begin geeft zo'n blok evenveel warmte af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot die van drie gloeilampen, ofwel 180 Watt.
De warmteafgifte neemt exponentieel af.

4p **12** ☐ Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte per jaar afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

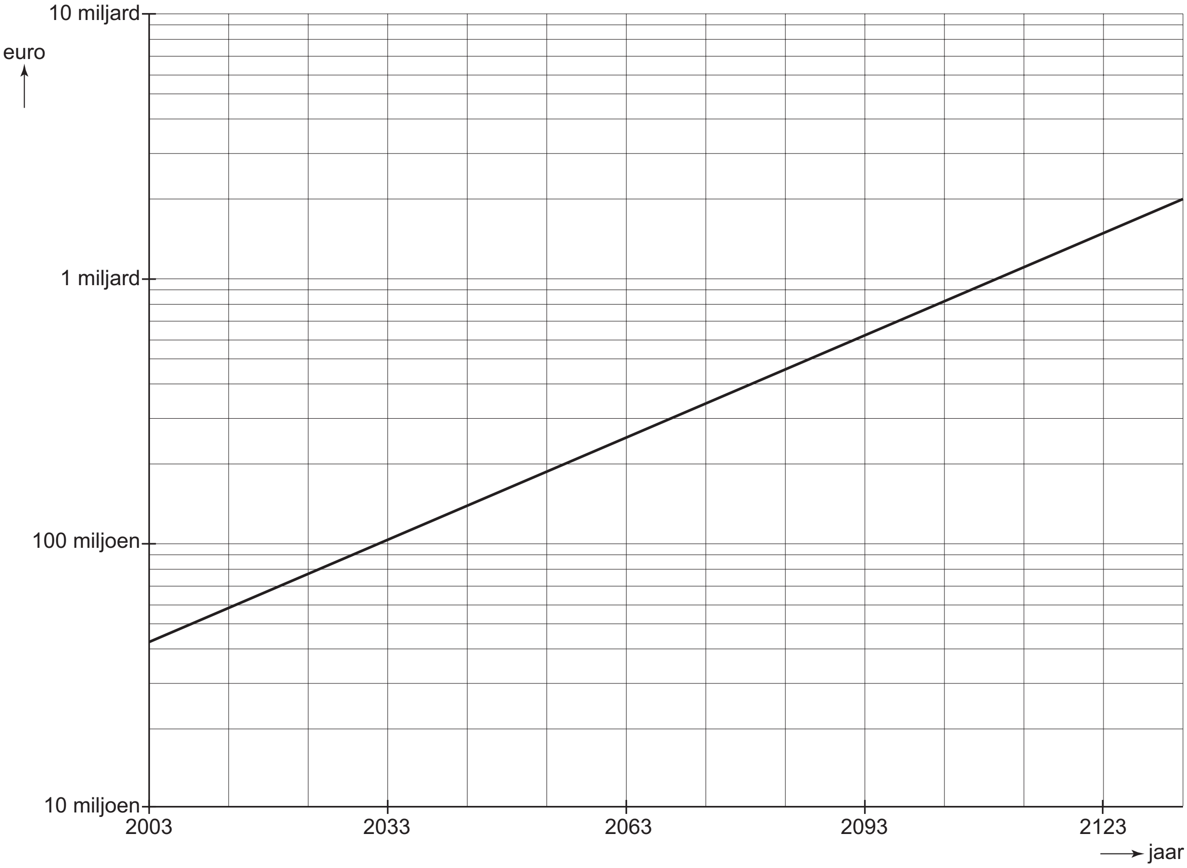
Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht (zie foto). Elke tien jaar wordt het gebouw opnieuw geverfd, telkens in een iets lichtere tint om de afname van de warmteafgifte mee aan te geven.
Je mag er in de rest van de opgave van uitgaan dat de warmteafgifte met 2,3% per jaar afneemt.

3p **13** ☐ Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte in een periode van tien jaar afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

3p **14** ☐ Bereken na hoeveel jaar de warmteafgifte nog maar de helft is van de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond je antwoord af op één decimaal.

Er wordt nu al geld gereserveerd om over meer dan honderd jaar het afval verder te kunnen verwerken. Daartoe is in het jaar 2003 een bedrag van 43 miljoen euro op een spaarrekening gezet.
In de grafiek van figuur 5 zie je hoe men verwacht dat dit bedrag zal toenemen. De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling.

figuur 5



De grafiek is een rechte lijn. Dit betekent dat men uitgegaan is van een vast rentepercentage per jaar gedurende de gehele looptijd.

5p **15** ☐ Bereken dat percentage.

Eis

foto

IJsproducent Pinguïn produceert 2,94 miljoen bekertjes roomijs.
De hoeveelheid ijs die in de bekertjes gedaan wordt, is bij benadering normaal verdeeld.
Op zo'n bekertje staat dat het 125 ml ijs bevat. In werkelijkheid zal dat zelden precies 125 ml zijn.
Pinguïn stelt *het vulgemiddelde* van de vulmachine in op 129,8 ml, zodat er gemiddeld 129,8 ml ijs in de bekertjes terechtkomt.
De standaardafwijking van de hoeveelheid ijs die in de bekertjes terechtkomt is 2,2 ml.

4p **16** ☐ Bereken hoeveel bekertjes er naar verwachting tussen 124 en 126 ml ijs bevatten. Geef je antwoord in duizenden bekertjes nauwkeurig.

Als Pinguïn het vulgemiddelde zou instellen op 125 ml, dan zou de helft van de bekertjes minder dan 125 ml ijs bevatten. De overheid eist echter dat hooguit 5% van de bekertjes minder dan 125 ml ijs bevat.

4p **17** ☐ Toon aan dat Pinguïn met zijn instelling van de vulmachine aan de eis van de overheid voldoet.

Pinguïn kan zijn vulgemiddelde lager instellen en toch aan de eis van de overheid blijven voldoen. Bij elk lager vulgemiddelde blijft de standaardafwijking 2,2 ml. Het instellen van zo'n lager vulgemiddelde levert bij 2,94 miljoen bekertjes een aardige besparing op aan de hoeveelheid roomijs die men moet produceren. De productiekosten van het roomijs bedragen 0,73 euro per liter.

5p **18** ☐ Bereken hoeveel euro Pinguïn maximaal kan besparen.

Differentia

Differentia is een eenvoudig dobbelspel. Het spel wordt gespeeld onder leiding van een spelleider, die er wat aan probeert te verdienen.
Tijdens het spel wordt er met twee dobbelstenen geworpen. Na een worp wordt er gekeken naar het *verschil* tussen de ogenaantallen van de twee dobbelstenen.
Als er bijvoorbeeld een 4 en een 6 gegooid worden, dan is het verschil 2.

3p **19** ☐ Toon aan dat de kans op een verschil van 2 gelijk is aan $\frac{8}{36}$.

De kansen op alle mogelijke verschillen staan in tabel 1.

tabel 1

Verschil	0	1	2	3	4	5
Kans	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

John, de spelleider, speelt met de deelnemers Mary, Liza, Jan en Renze een spelletje differentia met de volgende spelregels:

- iedere deelnemer kiest vooraf het verschil waar hij of zij gedurende het hele spel op inzet;
- de deelnemers kiezen vooraf het aantal worpen met de twee dobbelstenen;
- iedere deelnemer betaalt per worp 2 euro aan de spelleider;
- na elke worp betaalt de spelleider een bedrag uit aan iedere deelnemer die op het goede verschil heeft ingezet. Dat bedrag staat in tabel 2. De overige deelnemers ontvangen niets.

tabel 2

Verschil	0	1	2	3	4	5
Uitbetaling (in euro)	9	5	7	9	15	35

Mary zet in op verschil 0, Liza op verschil 5, Jan op verschil 1 en Renze op verschil 2. De deelnemers willen dat er in dit spel 15 keer geworpen wordt.
De dobbelstenen vallen als volgt, zie tabel 3.

tabel 3

Worp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Dobbelsteen 1	4	3	1	1	4	4	5	4	1	6	3	1	4	1	5
Dobbelsteen 2	3	2	1	2	5	5	2	6	4	2	4	6	4	1	1

De spelleider heeft bij dit spel met 15 worpen meer geld ontvangen dan uitbetaald.

5p **20** ☐ Bereken hoeveel euro de spelleider heeft verdiend.

Liza heeft op een verschil van 5 ingezet, omdat de uitbetaling dan zo hoog is. Ze wil weten of dat verstandig is.

4p **21** ☐ Toon aan dat bij inzetten op een verschil van 5 de verwachtingswaarde van de uitbetaling het hoogste is.

Gelukkig voor Liza is in dit spel één keer het verschil 5 voorgekomen. In het verleden is het wel eens gebeurd dat er tijdens een spel geen enkele keer het verschil 5 voorkwam. Ze denkt dat het toen beter was geweest om te kiezen voor meer worpen, zodat het verschil 5 misschien wel was voorgekomen.
De kans dat in n worpen tenminste één keer het verschil 5 voorkomt, wordt gegeven door de formule:

$$\text{P(tenminste één keer het verschil 5 in } n \text{ worpen)} = 1 - \left(\frac{34}{36}\right)^n$$

Liza wil graag dat er zo vaak wordt geworpen dat er een flinke kans is op tenminste één keer verschil 5.

4p **22** ☐ Bereken hoeveel worpen Liza minimaal moet kiezen, zodat die kans groter is dan 75%.

Einde