

Examen HAVO

2009

tijdvak 1
dinsdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

oud programma

wiskunde A1,2

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

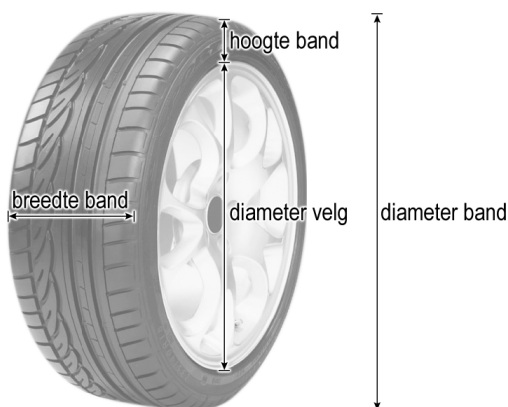
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Autobanden

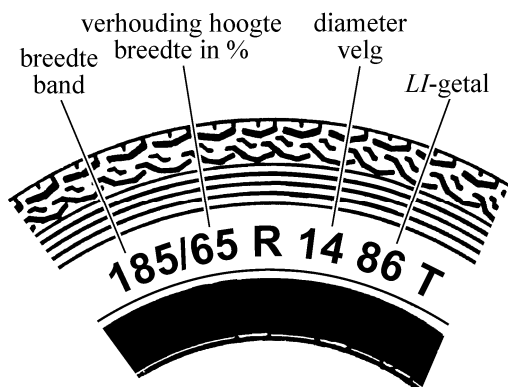
Er bestaan veel verschillende merken autobanden en per merk zijn er banden in allerlei soorten en maten. De diameter van de band hangt af van de diameter van de velg en de hoogte van de band. Banden zijn er ook nog in verschillende breedtes. Zie figuur 1.

figuur 1



Alle belangrijke eigenschappen worden op de zijkant van een band met behulp van een code aangegeven. Zie figuur 2.

figuur 2



Het eerste getal (185) is de breedte van de band in millimeters. Het tweede getal (65) is de verhouding van de hoogte van de band ten opzichte van de breedte van de band in procenten. Het volgende getal (14) is de diameter van de velg in inches (1 inch = 2,54 cm), daarna volgt het *LI*-getal van de band (86) dat het draagvermogen van de band aangeeft.

In de code op de band kun je de 'bandenmaat' aflezen. De bandenmaat bestaat uit 3 getallen. Voor de band uit figuur 2 is dat 185, 65, 14.

Dat betekent voor deze band dat de breedte van de band 185 millimeter is, dat de hoogte van de band 65% van de breedte is en dat de diameter van de velg 14 inch is.

- 3p 1 Laat met een berekening zien dat de diameter van deze band ongeveer 60 cm is.

Een bepaald soort band is er in verschillende bandenmaten. Zo loopt de breedte van 145 tot en met 215 mm in stappen van 10 mm, en de verhouding van de hoogte van de band ten opzichte van de breedte van de band loopt van 65 tot en met 80 procent in stappen van 5 procent. De banden worden geleverd met een velgdiameter van 13, 14 en 15 inch.

4p **2** Bereken hoeveel verschillende bandenmaten er van deze soort band zijn.

Het *LI*-getal (van *Load-Index*) geeft het draagvermogen van de band aan. Het *LI*-getal geeft aan welk gewicht (in kg) de band kan dragen. In tabel 1 staat voor enkele *LI*-getallen het draagvermogen van de band.

tabel 1

<i>LI</i>-getal	65	70	75	80	85	90	95	100	105
Draagvermogen (kg)	290	335	387	450	515	600	690	800	925

Er is bij benadering een exponentieel verband tussen het *LI*-getal en het draagvermogen: telkens als het *LI*-getal 1 groter wordt, groeit het draagvermogen met een bepaalde groeifactor.

4p **3** Bereken met behulp van dit exponentiële verband het draagvermogen van een band met *LI*-getal 103.

Hoe breder een band, hoe beter de grip op de weg. Hoe hoger een band, hoe meer comfort. Maar een hogere band gaat ten koste van de stabiliteit. Bij sportieve auto's wordt daarom gewoonlijk gekozen voor lage, brede banden.

Iemand heeft een auto waarop banden van het type **205/60 R 16** zijn gemonteerd. Hij wil graag een sportievere uitstraling, en heeft zijn oog laten vallen op banden **245/45**.

De snelheidsmeter vereist dat de diameter van de band hetzelfde blijft. Hij heeft dus grotere velgen nodig.

5p **4** Bereken de diameter van de grotere velgen in hele inches.

Schoolexamencijfer

Het schoolexamencijfer voor een vak wordt berekend met de cijfers die je behaald hebt voor praktische opdrachten en voor toetsen. We bekijken de resultaten voor het vak wiskunde A1,2 van een groep van 30 leerlingen uit 5 Havo van één school.

In tabel 1 staat van elke leerling het gemiddelde cijfer voor praktische opdrachten (PO's) en het gemiddelde cijfer voor toetsen. Rechts onderaan staan ook de gemiddelden en de standaardafwijkingen van deze cijfers.

tabel 1

leerling nummer	gemiddelde PO's	gemiddelde toetsen	leerling nummer	gemiddelde PO's	gemiddelde toetsen
1	7,3	5,8	16	8,2	7,2
2	6,8	5,9	17	7,3	5,9
3	8,2	6,0	18	7,1	6,0
4	8,1	4,5	19	7,1	5,6
5	6,5	4,9	20	7,2	6,1
6	2,0	8,6	21	7,6	6,8
7	8,6	8,3	22	8,4	6,3
8	7,4	6,2	23	8,2	5,4
9	7,5	5,9	24	7,0	6,1
10	6,9	6,2	25	6,6	4,8
11	2,0	4,1	26	6,8	6,4
12	7,6	6,1	27	7,2	6,3
13	7,9	5,9	28	5,3	5,8
14	5,8	3,8	29	4,0	4,6
15	7,6	6,3	30	8,8	8,2
			gemiddelde	6,90	6,00
			standaard-afwijking	1,63	1,09

Met de twee cijfers van iedere leerling wordt zijn of haar schoolexamencijfer berekend. Op deze school telt het gemiddelde voor de PO's voor 20% mee in het schoolexamencijfer.

In de tabel kun je zien dat van deze 30 leerlingen het gemiddelde cijfer voor de PO's 6,90 is en het gemiddelde voor de toetsen 6,00. Hiermee kan het gemiddelde schoolexamencijfer van deze 30 leerlingen worden berekend.

4p **5** Bereken dit gemiddelde schoolexamencijfer.

Johan, de leerling met nummer 14, heeft nu een 3,8 als gemiddelde voor de toetsen. Hij mag de toets met het laagste cijfer nog herkansen. Voor die herkansing scoort hij een zes.

Dit heeft invloed op het gemiddelde cijfer voor de toetsen van de hele groep, want dat wordt daardoor hoger.

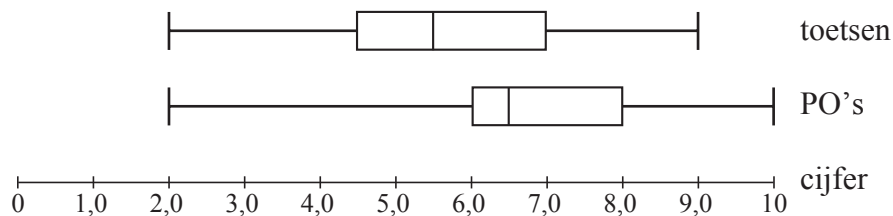
Het heeft ook invloed op de standaardafwijking bij de toetsen. Daarover kun je een uitspraak doen zonder de standaardafwijking opnieuw te berekenen.

- 3p **6** Wordt de standaardafwijking na Johans herkansing kleiner of groter? Licht je antwoord toe.

De school heeft meer groepen leerlingen met wiskunde A1,2 in 5 Havo. In totaal gaat het om 80 leerlingen. Kort voor het eindexamen heeft elke leerling een gemiddeld cijfer voor de toetsen en een gemiddeld cijfer voor de PO's. Daarmee wordt voor elke leerling het schoolexamencijfer berekend.

De gemiddelde cijfers voor de toetsen en de gemiddelde cijfers voor de PO's van alle 80 leerlingen zijn verwerkt in de twee boxplots in figuur 1.

figuur 1



We doen twee uitspraken:

A: 80% van de leerlingen heeft als gemiddeld PO-cijfer 5,5 of hoger.

B: Het laagste schoolexamencijfer is een 2,0.

- 4p **7** Leg uit waarom elk van deze twee uitspraken niet met zekerheid kan worden afgeleid uit de boxplots.

Landelijk is 6,2 het gemiddelde van de schoolexamencijfers van alle leerlingen bij wiskunde A1,2 Havo. Van de leerlingen scoort 22% een cijfer lager dan 5,5. De cijfers zijn bij benadering normaal verdeeld.

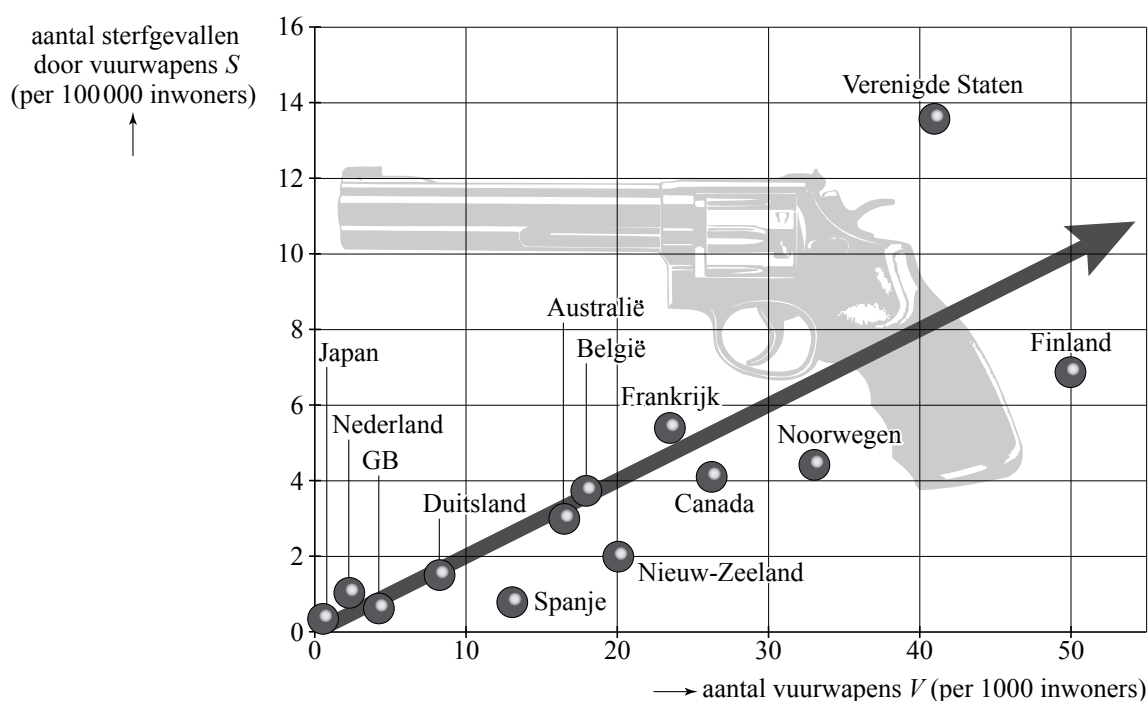
- 4p **8** Bereken de standaardafwijking van de landelijke schoolexamencijfers.

Hebben is schieten?

De regels omtrent het in bezit mogen hebben van vuurwapens zijn per land verschillend. Deze regels staan natuurlijk ook wel eens ter discussie. Tegenstanders van vuurwapenbezit beweren dat hoe makkelijker mensen aan vuurwapens kunnen komen, hoe meer die gebruikt worden. Voorstanders van vuurwapenbezit zeggen altijd dat het niet de wapens zijn die doden, maar de mensen. Zij vinden dat mensen vrij moeten zijn om een vuurwapen aan te schaffen, omdat meer vuurwapens niet betekent dat er dan ook meer gebruik van wordt gemaakt.

Het vuurwapenbezit en het aantal dodelijke slachtoffers door vuurwapens is in een aantal landen onderzocht. De onderzoeksresultaten zie je in figuur 1.

figuur 1



Figuur 1 geeft het verband weer tussen het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens S (per 100 000 inwoners) en het aantal vuurwapens V (per 1000 inwoners). Behalve de gegevens van een aantal landen is in figuur 1 ook een trendlijn getekend. Voor landen op de trendlijn is er sprake van een evenredig verband tussen S en V .

Nederland heeft ongeveer 16 miljoen inwoners, de Verenigde Staten ongeveer 295 miljoen.

- 5p **9** Bereken met behulp van figuur 1 hoeveel keer zo groot het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens in de Verenigde Staten is vergeleken met Nederland.

In 2005 heeft de bevolking van Brazilië zich in een referendum uitgesproken tegen het beperken van de verkoop van vuurwapens. En dat terwijl er in dit land met 180 miljoen inwoners jaarlijks zo'n 40 000 mensen sterven door vuurwapengebruik.

Ga ervan uit dat Brazilië op de trendlijn ligt, zodat je gebruik kunt maken van het evenredige verband tussen S en V .

- 5p **10** Bereken met behulp van dit evenredige verband het totaal aantal vuurwapens in Brazilië.

T-shirts

Thai-Tee is een onderneming in Thailand die T-shirts produceert voor de Amerikaanse markt.

Thai-Tee kan maximaal 200 000 T-shirts per jaar produceren.

De formules voor de totale opbrengst TO en de totale kosten TK zijn:

$$TO = 4500q^{0,89} + 18000q^{0,56}$$
$$TK = 0,12q^3 - 0,85q^2 + 150q + 100000$$

Hierin is q het aantal geproduceerde T-shirts in duizenden.

Dus q is hoogstens 200.

De totale opbrengst TO en de totale kosten TK zijn in dollars.

Er is sprake van winst als de totale opbrengst groter is dan de totale kosten.

- 5p **11** Bereken bij welke aantallen T-shirts er winst wordt gemaakt.

Er bestaan verschillende wiskundige technieken om de productiegrootte te bepalen waarbij de winst maximaal is.

Voor het bepalen van deze productiegrootte bij Thai-Tee kiezen we voor de techniek waarbij de vergelijking $TO' = TK'$ moet worden opgelost.

Hierin is TO' de afgeleide van TO en TK' de afgeleide van TK .

- 6p **12** Stel de formules van TO' en TK' op en bereken bij welk aantal T-shirts de winst maximaal is.

Voor de onderneming is het ook belangrijk om te weten wanneer de gemiddelde kosten GK per T-shirt minimaal zijn.

De gemiddelde kosten zijn te berekenen met de formule $GK = \frac{TK}{1000 \cdot q}$

Ook hier zijn de totale kosten in dollars en het aantal geproduceerde T-shirts q in duizenden.

- 4p **13** Bereken bij welk aantal T-shirts de gemiddelde kosten minimaal zijn en wat de gemiddelde kosten per T-shirt dan zijn.

Datingshow

In een datingshow op televisie maken drie jongens (Richard, Sander en Tim) en drie meisjes (Kathy, Lisa en Maaïke) kennis met elkaar. Tijdens de show geven ze antwoord op allerlei vragen van de presentator. Op deze manier komen ze iets over elkaar te weten. Na beantwoording van de vragen kiest elke jongen één meisje en elk meisje één jongen, zonder te laten zien wie ze kiezen. Na afloop worden de keuzes bekendgemaakt en wanneer een jongen en een meisje elkaar hebben gekozen, hebben ze een kort, luxueus reisje gewonnen om elkaar (nog) beter te leren kennen.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de jongens en de meisjes willekeurig kiezen, dus ieder heeft een even grote kans om gekozen te worden. Dan is de kans dat een jongen een bepaald meisje kiest dus $\frac{1}{3}$.

Maaïke is bang dat alle televisiekijkers zien dat ze door niemand wordt gekozen. Ze vraagt zich af hoe groot de kans is dat minstens één van de drie jongens haar kiest.

4p **14** Bereken deze kans.

De organisator van de datingshow moet de kosten van de show in de gaten houden. De luxueuze reisjes zijn erg duur. Toch is het mogelijk dat er in de show drie reisjes worden gewonnen, omdat er drie 'stelletjes' zijn die elkaar gekozen hebben. Dit kan op verschillende manieren gebeuren. Eén daarvan is: Richard en Kathy kiezen elkaar, Sander en Lisa kiezen elkaar en Tim en Maaïke kiezen elkaar.

3p **15** Schrijf alle mogelijke manieren op waarbij er precies drie stelletjes gevormd worden.

Het kost de organisatie elke keer 4000 euro wanneer er door een stelletje een reisje wordt gewonnen.

Je kunt berekenen hoe groot de kans is dat er in de show stelletjes worden gekozen. Deze kansen staan in tabel 1.

tabel 1

aantal stelletjes	0	1	2	3
kans	$\frac{156}{729}$	$\frac{423}{729}$	$\frac{144}{729}$	$\frac{6}{729}$

4p **16** Bereken de verwachtingswaarde van het bedrag dat de organisatie per show kwijt is aan reisjes.

Het is goed voor de kijkcijfers als er in elke show één of meer stelletjes worden gevormd. In tabel 1 kun je zien dat dit niet altijd hoeft te gebeuren.

3p **17** Bereken de kans dat in de eerste twee shows geen enkel stelletje wordt gevormd.

Volumes

Een opgeblazen papieren zak heeft, net als een kussen, een speciale vorm. Pas in 2004 is er een formule gevonden waarmee het volume van die vorm kan worden berekend.

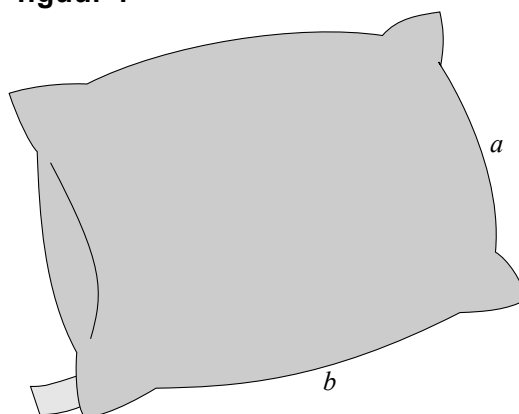
Van een platte rechthoekige zak of kussen noemen we de kortste zijde a (in dm) en de langste zijde b (in dm). Zie figuur 1.

Het volume V (in liter) van de opgeblazen zak of het kussen kan dan berekend worden met de formule:

$$V = a^3 \cdot (0,142 \cdot 0,1^r + 0,318 \cdot r - 0,142)$$

Hierin is r de verhouding tussen de zijden: $r = \frac{b}{a}$.

figuur 1



3p 18

Een bedkussen heeft afmetingen van 4 dm bij 6 dm.

Bereken het volume van dit kussen.

Voor een vierkant kussen met zijden a kan bovenstaande formule vereenvoudigd worden tot:

$$V = 0,1902 \cdot a^3$$

Een kussen met een kortste zijde van 3,5 dm heeft hetzelfde volume als een vierkant kussen van 5 bij 5 dm.

5p 19

Bereken de langste zijde van dat kussen.

Ook voor vuilniszakken bestaat er een formule om het volume te berekenen. Een volle vuilniszak wordt bovenaan dichtgeknoopt en krijgt daardoor ook een bijzondere vorm. Zie de foto hiernaast.

Het volume V (in liter) wordt berekend met:

$$V = a^3 \cdot \left(\frac{b-x}{3,142 \cdot a} - 0,159 \right)$$

Hierin zijn a en b de kortste en de langste zijde (in dm) van een platte, rechthoekige vuilniszak en is x de hoogte van de knoopstrook (in dm).

foto



Een vuilniszak met een korte zijde van 6 dm en een knoopstrook van 0,5 dm heeft een volume van 52 liter.

4p 20

Bereken de lange zijde b van de vuilniszak.