wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **04**

Tijdvak 2
Woensdag 23 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 7 en 10 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

APK

Auto's moeten elk jaar gekeurd worden. Deze wettelijk verplichte keuring wordt APK, Algemene Periodieke Keuring, genoemd en wordt uitgevoerd door garagebedrijven.
Om na te gaan of de garagebedrijven de keuringen goed uitvoeren, voert de RDW, de Rijks Dienst voor Wegverkeer, controles uit. De RDW doet dit steekproefsgewijs. Dat wil zeggen: van alle auto's die worden gekeurd door de garagebedrijven, selecteert de RDW er een aantal en onderwerpt die auto's aan een controle. Op deze wijze controleert de RDW 3% van alle gekeurde auto's.

Een garagebedrijf gaat op een dag 5 auto's keuren.

3p **1** ☐ Bereken de kans dat geen van deze 5 auto's door de RDW wordt gecontroleerd. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Voor het beoordelen van de kwaliteit van de garagebedrijven hanteert de RDW een puntensysteem:
Ieder garagebedrijf begint met 0 punten. Als bij controle door de RDW blijkt dat de keuring van een auto niet goed is verricht, krijgt het garagebedrijf 1,5 strafpunten. Als de keuring van een auto wel goed is uitgevoerd, krijgt het garagebedrijf 0,4 bonuspunten. Strafpunten en bonuspunten worden met elkaar verrekend. Als een garagebedrijf bijvoorbeeld 0,8 bonuspunten en 1,5 strafpunten heeft gekregen, levert dit 0,7 strafpunten op. Daarmee komt het aantal punten voor dit bedrijf op –0,7.

Garagebedrijf Hendriks heeft 0 punten. Bij dit bedrijf wordt 20% van de keuringen niet goed uitgevoerd. De RDW voert vijf keer een controle bij Hendriks uit.

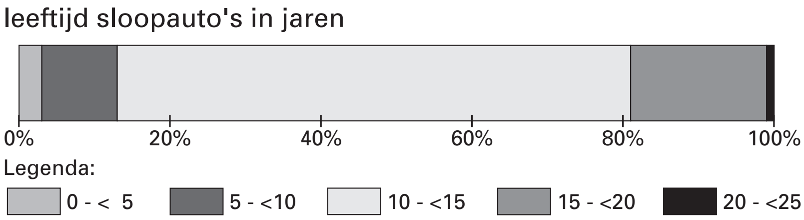
4p **2** ☐ Bereken de kans dat garagebedrijf Hendriks na deze vijf controles meer dan 0 punten heeft. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Met behulp van het puntensysteem van de RDW kunnen we narekenen dat bij een garagebedrijf waar 15% van de keuringen niet goed wordt uitgevoerd, elke uitgevoerde controle gemiddeld 0,115 punten oplevert. Dus acht controles door de RDW leveren zo'n bedrijf naar verwachting 0,92 punten op.
Garagebedrijf Kampman voert slechts 10% van de keuringen niet goed uit. Acht controles door de RDW zullen dit garagebedrijf naar verwachting meer punten opleveren.
Garagebedrijf Kampman heeft 0 punten.

4p **3** ☐ Bereken hoeveel punten garagebedrijf Kampman naar verwachting zal hebben nadat de acht controles zijn uitgevoerd.

Mede door de APK neemt de gemiddelde levensduur van personenauto's toe. In het begin van de jaren negentig van de vorige eeuw was een personenauto na 9 à 10 jaar rijp voor de sloop. In 1998 lag de gemiddelde levensduur al een stuk hoger. Deze gemiddelde levensduur kun je berekenen met behulp van de gegevens in figuur 1. Daarin vind je in de vorm van een samengesteld staafdiagram de verdeling naar leeftijd van de personenauto's die in 1998 werden gesloopt.

figuur 1



4p **4** ☐ Bereken met behulp van de gegevens in figuur 1 hoe groot in 1998 de gemiddelde levensduur was van personenauto's op het moment van slopen.

Kaartspel

Een set speelkaarten bestaat uit 52 kaarten, verdeeld in de soorten schoppen (♠), harten (♥), ruiten (♦) en klaveren (♣). Iedere soort bevat 13 kaarten, met de opdruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer of aas.

Het kaartspel bridge wordt gespeeld door vier spelers, die ieder 13 kaarten krijgen. Zie figuur 2.
We gaan er bij deze opgave van uit dat het delen van de kaarten op aselecte wijze gebeurt. Dat betekent dat bij elk spel iedere speler evenveel kans heeft op een bepaalde kaart.

Arie, Bert, Clemens en Douwe spelen bridge.

figuur 2

Een voorbeeld van 3 hartenkaarten, 4 klaverenkaarten, 4 ruitenkaarten en 2 schoppenkaarten.

De kans dat Clemens bij een spel precies twee klaverenkaarten krijgt, is ongeveer 0,2.

4p **5** ☐ Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Arie heeft gedurende een lange periode bijgehouden hoeveel klaverenkaarten hij bij elk spel kreeg. Het resultaat van 10 000 spellen vind je in tabel 1.

tabel 1

aantal klaverenkaarten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 of meer
frequentie	130	802	2060	2865	2385	1245	414	87	12	0

Het aantal van 10 000 spellen is erg groot. Dat betekent dat we de uitkomsten in tabel 1 goed kunnen gebruiken om de theoretische kansen op de bijbehorende aantallen klaverenkaarten te benaderen.

3p **6** ☐ Gebruik tabel 1 om de kans te berekenen dat je in 10 spellen precies één keer géén klaverenkaarten krijgt. Rond je antwoord af op vier decimalen.

Douwe heeft een histogram opgesteld van de gegevens uit tabel 1. Op grond hiervan vermoedt hij dat het aantal klaverenkaarten K per spel bij benadering normaal verdeeld is.

6p **7** ☐ Zet de cumulatieve kansverdeling die volgt uit tabel 1 uit op normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage en geef je oordeel over het vermoeden van Douwe. Licht je antwoord toe.

Wanneer de kaarten aselect worden gedeeld, is de verwachtingswaarde van het aantal klaverenkaarten dat een speler per spel krijgt gelijk aan 3,25 en de bijbehorende standaardafwijking gelijk aan 1,365.
Veel spelcomputers gebruiken het software-programma ‘Split’ om het delen van de kaarten te simuleren. Bert vermoedt al een tijdje dat ‘Split’ hem te weinig klaverenkaarten geeft. Daarom houdt hij gedurende 100 spellen bij hoeveel klaverenkaarten hij krijgt. Dat blijken er in totaal 302 te zijn.

6p **8** ☐ Onderzoek of er voldoende aanleiding is om te veronderstellen dat het programma ‘Split’ Bert te weinig klaverenkaarten geeft. Neem als significantieniveau 5%. Je kunt hierbij gebruik maken van het feit dat het totale aantal klaverenkaarten bij 100 spellen bij benadering normaal verdeeld is.

Woorden tellen

In ziekenhuizen verschijnen veel rapporten die over de behandeling van patiënten gaan. In dergelijke rapporten komen, naast het gewone taalgebruik, ook veel medische termen voor. Bij twee ziekenhuizen heeft men onderzoek gedaan naar het woordgebruik in deze rapporten. Hiervoor heeft men van 5000 rapporten geteld hoe vaak ieder woord in totaal voorkwam.
Deze rapporten bevatten samen 996 734 woorden. Toch waren er in totaal slechts ongeveer 20 000 verschillende woorden. Dit komt omdat er woorden zijn die heel vaak gebruikt worden. Om je hiervan een idee te geven zie je in tabel 2 de tien woorden die het meest frequent in de rapporten werden gebruikt.

tabel 2

woord	een	de	van	met	en	het	in	is	ik	geen
frequentie	40 361	36 485	34 231	27 667	26 869	22 965	22 082	13 681	11 416	11 363
rangnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Je ziet dat in de tabel de woorden op *rangnummer*, in volgorde van hun frequentie, zijn genoemd. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat het woord ‘met’ in totaal 27 667 keer is geteld en dat dit woord rangnummer 4 heeft.

De onderzoekers J. B. Estoup en G. K. Zipf hebben geprobeerd in allerlei teksten een verband te vinden tussen het rangnummer r van een woord en de bijbehorende frequentie f_r. In 1949 vond Zipf de formule:

$$f_r = \frac{C}{r}$$

Deze formule wordt ook wel de ‘wet van Zipf’ genoemd.
De waarde van C hangt af van het totale aantal woorden in de tekst. Volgens Zipf is C de oplossing van de vergelijking:

$$2{,}3 \cdot C \cdot \log C = \textit{aantal woorden in de tekst}$$

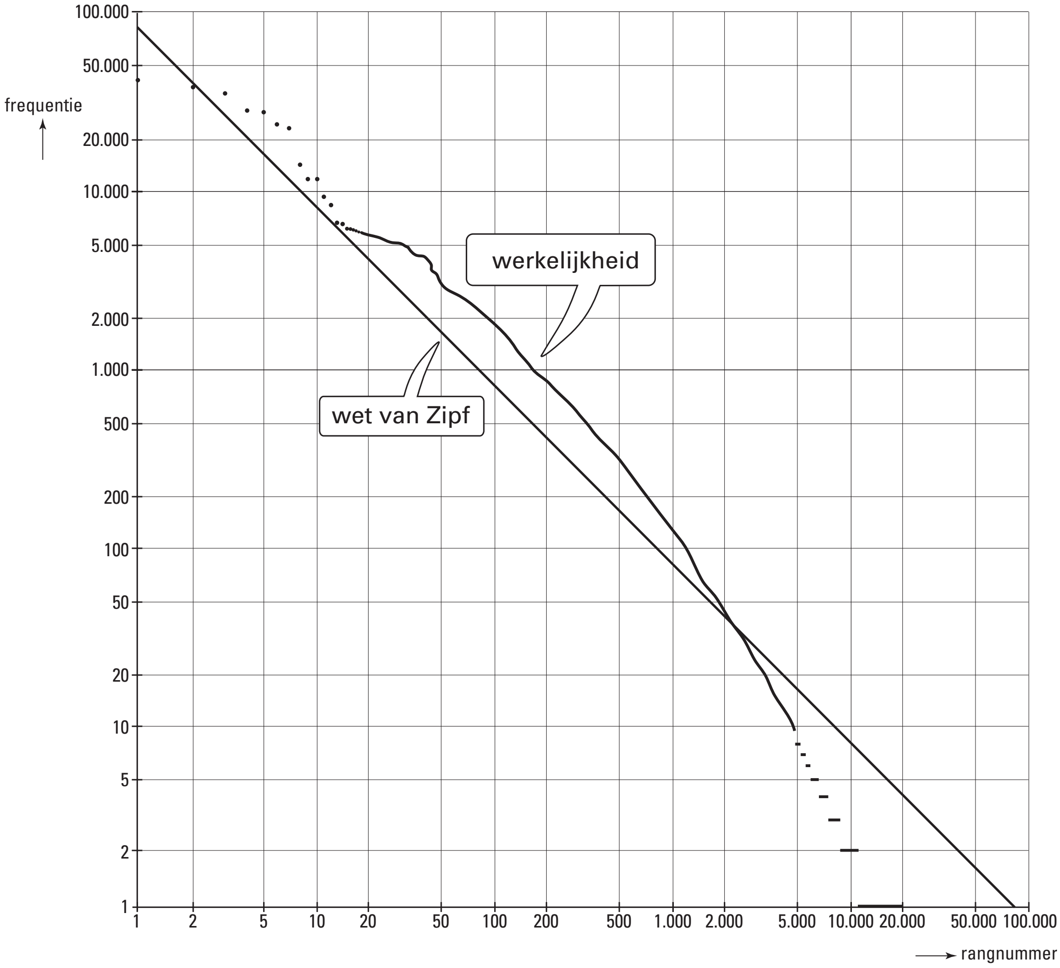
De rapporten van één van de ziekenhuizen bevatten samen 495 378 woorden.

3p **9** ☐ Bereken de waarde van C die bij de rapporten van dit ziekenhuis hoort. Rond af op duizendtallen.

Voor de 996 734 woorden in de rapporten van beide ziekenhuizen *samen* geldt $C = 88\,000$.

In figuur 3 zijn van alle gebruikte woorden de frequenties uitgezet tegen de rangnummers. Op beide assen is gekozen voor een logaritmische schaalverdeling. De woorden uit tabel 2 vind je in figuur 3 terug als de bovenste 10 punten.
Om de wet van Zipf en de werkelijkheid met elkaar te kunnen vergelijken, is in figuur 3 ook de grafiek van $f_r = \frac{88\,000}{r}$ getekend. Figuur 3 is ook afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 3



De wet van Zipf geldt voor algemene teksten zoals krantenartikelen en dergelijke. Omdat medische rapporten niet 'algemeen' zijn, vertonen de grafieken opmerkelijke verschillen.

Tussen de rangnummers 2 en (ongeveer) 2200 zijn de werkelijke frequenties groter dan de frequenties volgens de wet van Zipf.

4p **10** ☐ Onderzoek of dit verschil bij $r = 100$ groter is dan bij $r = 500$. Licht je antwoord toe.

Iemand trekt uit figuur 3 de volgende twee conclusies:

1. In deze medische rapporten heeft een meerderheid van de gebruikte woorden een hogere frequentie dan de wet van Zipf voorspelt voor teksten met deze omvang.
2. Deze medische rapporten bevatten minder verschillende woorden dan de wet van Zipf voorspelt voor teksten met deze omvang.

4p **11** ☐ Geef over elk van deze conclusies een gemotiveerd oordeel.

In figuur 3 zie je dat er in de medische rapporten woorden voorkomen die dezelfde frequentie hebben. Volgens de wet van Zipf zou dit niet kunnen. Deze wet, $f_r = \dfrac{88000}{r}$, zegt dat f_r steeds minder snel afneemt naarmate r toeneemt.

4p **12** ☐ Stel de afgeleide van f_r op en toon met deze afgeleide aan dat voor de wet van Zipf inderdaad geldt dat f_r steeds minder snel afneemt als r toeneemt.

Het vierde gewas

In de akkerbouw is het normaal dat een boer op zijn grond niet elk jaar hetzelfde gewas verbouwt. Om te voorkomen dat ziekteverwekkers in de bodem te veel invloed krijgen, is het beter in de loop van de jaren verschillende gewassen te verbouwen.

Het bedrijf Zaanstra heeft 36 ha akkerland. Op 12 ha ervan worden aardappelen geteeld, op 12 ha suikerbieten en op de overige 12 ha granen. Een jaar later wordt er op de drie stukken land gewisseld van gewas en een jaar later nog een keer. Zo wordt elk gewas eens per drie jaar op elk stuk grond verbouwd.
Per jaar kost het bewerken van één ha aardappelen aan menskracht 19 werkdagen. Voor suikerbieten is dat 20 werkdagen en voor granen 24 werkdagen.

Bij het bedrijf overweegt men nog een gewas te gaan telen en het akkerland dus te verdelen over vier gewassen, elk 9 ha. Dan krijgen ziekteverwekkers nog minder kans en dat verhoogt de kwaliteit van de oogst.
Het bedrijf stelt als voorwaarde dat het totale aantal werkdagen per jaar niet hoger mag worden. Dat betekent dat er voor zo'n vierde gewas ten hoogste 189 werkdagen per jaar beschikbaar zijn.

3p **13** ☐ Laat zien dat het getal 189 juist is.

Voor dit vierde gewas heeft het bedrijf de keuze uit verschillende plantensoorten, waarvan de zaden veel bruikbare oliën en vetten bevatten. In tabel 3 staan enkele gegevens over deze plantensoorten.

tabel 3

	akkermoesbloem	komkommerkruid	teunisbloem
werkdagen (per ha)	16	22	24
oogst in kg (per ha)	1000	800	800
opbrengst (per kg)	€ 3,00	€ 4,00	€ 4,50

Voor het bewaren van de oogst van deze gewassen beschikt het bedrijf over een koelruimte, waar men ten hoogste 8400 kg zaden kan opslaan.

We kunnen de conclusie trekken dat het voor Zaanstra niet mogelijk is de 9 ha helemaal te gebruiken voor de teelt van slechts één van de drie plantensoorten akkermoesbloem, komkommerkruid of teunisbloem.

3p **14** ☐ Toon dit aan.

We willen nagaan welke verdeling van de beschikbare 9 ha grond over de drie plantensoorten de grootst mogelijke opbrengst oplevert. Het aantal ha dat wordt gebruikt voor akkermoesbloem geven we aan met x, dat voor komkommerkruid met y en dat voor teunisbloem dus met $9 - x - y$.
Naast de voorwaarden $x \geq 0$ en $y \geq 0$ gelden voor mogelijke oplossingen ook de voorwaarden:

I $x + y \leq 9$
II $x \leq 6$
III $8x + 2y \geq 27$

5p **15** ☐ Toon aan dat de voorwaarden II en III volgen uit bovenstaande gegevens.

8p **16** ☐ Onderzoek bij welke verdeling van de grond over de drie plantensoorten de jaarlijkse opbrengst voor Zaanstra zo groot mogelijk is.

Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enz.

Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $\frac{16+12,8}{2}=14,4$ minuten. Deze 14,4 minuten zie je in tabel 4. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

tabel 4

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Met behulp van tabel 4 kunnen we berekenen dat een werknemer 8,1 minuten nodig heeft om handeling A voor de 5e keer te verrichten.

3p **17** □ Geef zo'n berekening.

We willen een formule opstellen voor de gemiddelde handelingstijd H_n.
Daartoe kijken we eerst naar de tijd T_n die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de volgende formule:

$$T_n = 6 + 10 \cdot 0,68^{n-1}$$

In deze formule is T_n in minuten. Inderdaad levert deze formule $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12,8$.
Aan deze formule kun je zien dat de handelingstijd steeds korter wordt naarmate n toeneemt. Toch zal er altijd enige tijd nodig blijven om handeling A uit te voeren. Dat betekent dat er op den duur vrijwel geen tijd meer wordt gewonnen.

3p **18** □ Hoeveel minuten is de handelingstijd op den duur korter dan de eerste handelingstijd? Licht je antwoord toe.

Om een formule voor H_n op te kunnen stellen, merken we op dat geldt:

$$H_n = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n}{n}$$

We moeten dus eerst de som $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$ van de eerste n termen berekenen.
Elk van deze termen bestaat uit een constante (het getal 6) en een exponentieel deel. De exponentiële delen vormen een meetkundige rij. Dat betekent dat we voor de som ervan gebruik kunnen maken van de somformule van een meetkundige rij.
Dat leidt tot de volgende formule voor de gemiddelde handelingstijd:

$$H_n = 6 + \frac{31,25 \cdot (1 - 0,68^n)}{n}$$

6p **19** □ Leid deze formule af met behulp van de formule voor T_n.

We noemen een werknemer *ervaren voor handeling A* wanneer de gemiddelde handelingstijd minder dan 7 minuten is.
In de industrie wil men graag weten hoe lang het duurt voordat een werknemer zo ver is gekomen.

3p **20** □ Onderzoek hoeveel handelingen een werknemer achter elkaar moet uitvoeren volgens de formule voor H_n voordat hij ervaren voor handeling A kan worden genoemd.

Einde