

Examen VWO 2009

tijdvak 2
woensdag 24 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1,2

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zeemonsters

In 1972 werd de mesoplodon densirostris ontdekt in de oceaan. Het is een dolfijnensoort die 7 meter lang kan worden. Mede naar aanleiding van deze vondst deed de bioloog C. Paxton onderzoek naar de vraag hoeveel van dergelijke grote diersoorten er in de toekomst nog meer ontdekt zullen worden. Paxton beperkte zich tot wat hij zeemonsters noemde: dieren die in zee leven en meer dan 2 meter lang kunnen worden.

foto



Een mesoplodon densirostris

Op basis van gegevens over het aantal ontdekte zeemonsters in verschillende jaren stelde Paxton het volgende model op:

$$P(t) = \frac{264t - 476657}{t - 1767}$$

Met dit model kon hij een schatting maken van het aantal ontdekte soorten tot en met een zeker jaar t . In deze formule is $P(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Dus als je een schatting wilt van het aantal soorten dat bijvoorbeeld op het eind van het jaar 1980 bekend is, dan moet je $t = 1980$ invullen in de formule. De uitkomst wordt afgerond op gehelen.

- 3p 1 Vanaf eind 1895 tot en met eind 1995 zijn er in werkelijkheid 30 soorten ontdekt. Bereken hoeveel soorten er volgens het model van Paxton zouden zijn ontdekt in deze periode.

Zo nu en dan wordt er een nieuwe soort ontdekt. Dat betekent dat het aantal bekende soorten toeneemt. Het model van Paxton moet dus een grafiek opleveren die altijd stijgt. Dit kunnen we controleren met behulp van de afgeleide van $P(t)$.

- 4p 2 Stel de formule op voor de afgeleide van $P(t)$ en toon met behulp daarvan aan dat de grafiek van $P(t)$ altijd stijgt.

J. Groot schreef in 2003 een artikel in het wiskundeblad Pythagoras over het model van Paxton. Daarin schreef hij dat hij met dezelfde gegevens een ander model had gevonden. Zijn model zag er als volgt uit:

$$G(t) = 218 \cdot (1 - 0,9799^{t-1798})$$

In deze formule is $G(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Ook hier wordt de uitkomst afgerond op gehelen.

De twee formules hierboven zijn verschillend, dus je mag verwachten dat beide modellen niet altijd dezelfde uitkomsten opleveren. Voor $t = 1931$ bijvoorbeeld geeft het model van Paxton 202 soorten en het model van Groot 203. Vanwege de afronding op gehelen is er een aantal jaren waarvoor de twee modellen wél dezelfde uitkomst geven. Onder andere is dat het geval bij $t = 1938$: beide modellen leveren dan elk 205 bekende soorten. Er zijn nog meer jaren uit de periode 1930 tot en met 1945 waarvoor beide modellen dezelfde uitkomst geven.

4p **3** Onderzoek welke jaren dat zijn.

Paxton en Groot ontwikkelden hun modellen vooral om een schatting te kunnen maken van het aantal soorten zeemonsters dat men in de toekomst nog zou kunnen ontdekken. Elk van deze beide modellen voorspelt dan ook dat het aantal soorten zeemonsters een grenswaarde heeft.

Volgens het model van Paxton zullen er na 2009 nog 42 soorten zeemonsters ontdekt worden.

4p **4** Bereken hoeveel soorten zeemonsters er na 2009 nog ontdekt zullen worden volgens het model van Groot.

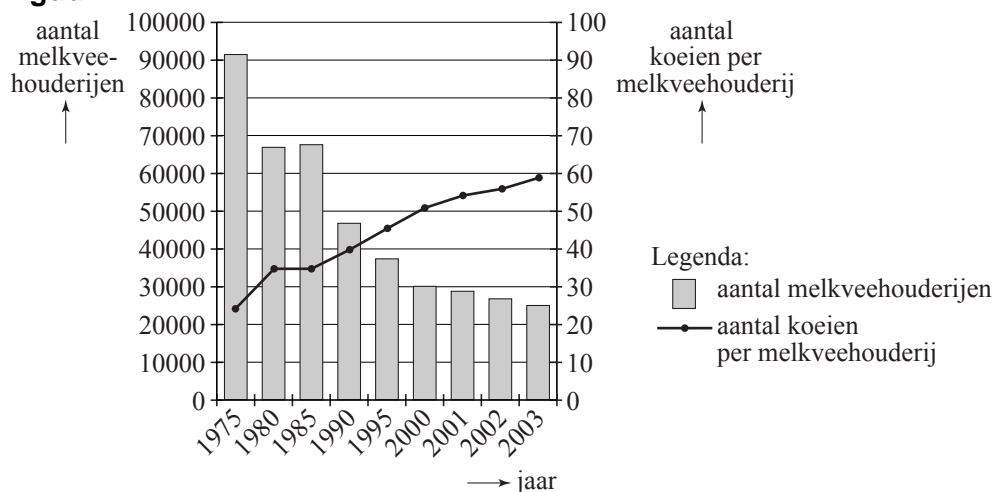
Behalve de formules van Paxton en Groot zijn er nog meer formules denkbaar die de werkelijke aantallen bekende soorten zeemonsters goed benaderen. Een mogelijkheid is bijvoorbeeld een formule van de vorm $F(t) = \sqrt{at + b}$. In deze formule is $F(t)$ het aantal soorten tot en met jaar t . De waarden voor a en b worden zo gekozen dat het model precies overeenkomt met de werkelijke aantallen soorten zoals die eind 1895 en eind 1995 bekend waren. Eind 1895 waren er in werkelijkheid 187 soorten zeemonsters bekend. Eind 1995 waren dat er 217.

6p **5** Bereken de waarden van a en b .

Melkvee

De afgelopen jaren is het aantal melkveehouderijen afgenomen. Het (gemiddelde) aantal koeien per melkveehouderij is echter toegenomen. Beide ontwikkelingen zijn weergegeven in figuur 1. Figuur 1 is gebaseerd op gegevens van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS).

figuur 1



Op basis van de gegevens in figuur 1 kan worden onderzocht of het totale aantal koeien in Nederland in 2003 groter of kleiner was dan in 1975.

4p **6** Voer dat onderzoek uit aan de hand van een berekening.

Koeien worden tegenwoordig gemolken door een zogenaamde melkrobot. De melkrobot melkt de koe zonder dat de boer daarbij aanwezig hoeft te zijn. In 2005 werd door de dierenbescherming het volgende persbericht gepubliceerd:

persbericht

“In 2002 bleef 10% van de melkveestapel in de stal. De melkrobot heeft tot gevolg dat er steeds minder koeien in de wei komen. De dierenbescherming is daarom tegenstander van melkrobots.

Dit jaar (2005 dus) blijft maar liefst 17% van de melkveestapel het hele jaar in de stal. Daardoor blijven de weilanden leeg. Als deze trend zich doorzet, verwachten wij dat over zo'n tien jaar de helft van de melkveestapel uit het Nederlandse landschap is verdwenen.”

Uit het persbericht blijkt dat 90% van het melkvee in 2002 in de wei komt. Ook zien we dat in 2005 nog slechts 83% van het melkvee in de wei komt.

In het persbericht is sprake van een 'trend', maar het wordt niet duidelijk van welk model men daarbij is uitgegaan en waar "de helft van de melkveestapel" vandaan komt. Enkele voor de hand liggende modellen zijn:

1. een trend waarbij het percentage melkvee dat in de wei komt lineair daalt;
2. een trend waarbij het percentage melkvee dat in de wei komt exponentieel afneemt.

- 4p **7** Bereken hoeveel procent van het melkvee in 2015 volgens model 1 en hoeveel procent volgens model 2 in de wei komt.

Voor het beschrijven van de situatie op de lange duur is model 1 op grond van wiskundige overwegingen niet bruikbaar maar model 2 misschien wel.

- 2p **8** Leg uit waarom model 1 op de lange duur zeker niet realistisch kan zijn, maar model 2 misschien wel.

Boer Poelen is melkveehouder. In de loop van de tijd is zijn aantal koeien toegenomen. Hij schaft om werk te besparen een melkrobot aan ter waarde van 145 000 euro. Het geld voor de aanschaf van de melkrobot wordt geleend van een bank tegen 5% rente per jaar. Boer Poelen betaalt aan het eind van elk jaar een vast bedrag van 12 000 euro voor aflossing en rente van de lening samen. Met behulp van deze gegevens kun je een recursievergelijking¹⁾ opstellen voor $L(n)$, de resterende schuld na jaar n .

- 5p **9** Stel deze recursievergelijking op en bereken daarmee hoeveel jaar het zal duren voordat de melkrobot helemaal is afbetaald.

noot 1 Een recursievergelijking wordt ook wel recursieformule of recurrente betrekking genoemd.

Bingo

Bingo is een populair kansspel. Om te spelen moet een speler een Bingokaart kopen. Deze kaart bevat 5 rijen en 5 kolommen met willekeurige getallen. In het midden van de kaart is geen getal aanwezig. In figuur 1 zie je een voorbeeld van een Bingokaart¹⁾.

figuur 1

B	I	N	G	O
4	18	32	48	71
11	25	45	54	62
13	19		51	67
8	24	39	49	74
1	27	36	59	63

De kolom onder de letter **B** bevat 5 getallen uit de reeks 1 tot en met 15.
De kolom onder de letter **I** bevat 5 getallen uit de reeks 16 tot en met 30.
De kolom onder de letter **N** bevat 4 getallen uit de reeks 31 tot en met 45.
De kolom onder de letter **G** bevat 5 getallen uit de reeks 46 tot en met 60.
De kolom onder de letter **O** bevat 5 getallen uit de reeks 61 tot en met 75.
Elk getal komt niet vaker dan één keer per Bingokaart voor. Op elke Bingokaart staan dus 24 verschillende getallen. In elke kolom staan de getallen niet noodzakelijk op volgorde van grootte. Dus als je in de Bingokaart van figuur 1 bijvoorbeeld de getallen 4 en 11 verwisselt, krijg je een andere Bingokaart.

4p 10 Toon aan dat er ongeveer $5,5 \cdot 10^{26}$ verschillende Bingokaarten mogelijk zijn.

Bij Bingo heeft de spelleider een bak met daarin 75 balletjes waarop de getallen 1 tot en met 75 staan. Tijdens een spel Bingo wordt telkens een balletje getrokken. Het getal op dat balletje wordt aan de spelers hardop voorgelezen. Als dat getal op een Bingokaart van een speler staat, kan de speler dat getal doorstrepen. Het getrokken balletje wordt niet teruggedaan in de bak. Zodra een speler alle 24 getallen op een kaart heeft doorgestreept, mag hij 'BINGO!' roepen. De speler die als eerste 'BINGO!' roept, wint een prijs. Dan is het spel afgelopen en kan een nieuw spel beginnen.

Voor het spel maakt het dus niet uit hoe de getallen in de kolommen staan. In figuur 2 zie je een Bingokaart die is ontstaan door de getallen in elke kolom van de kaart van figuur 1 in een andere volgorde te zetten.

noot 1 We bekijken in deze opgave alleen Bingokaarten van het type zoals hier beschreven. Er worden in werkelijkheid ook andere soorten gebruikt maar die zijn hier niet van belang.

figuur 2

B	I	N	G	O
11	18	39	49	74
4	25	45	51	67
1	19		54	63
8	27	32	48	71
13	24	36	59	62

De speler met de kaart van figuur 2 kan op precies hetzelfde moment 'BINGO!' roepen als de speler met de kaart van figuur 1. We zeggen daarom dat de kaart in figuur 2 niet **wezenlijk** verschilt van de kaart van figuur 1.

- 4p 11 Bereken hoeveel verschillende Bingokaarten er kunnen bestaan die wezenlijk van elkaar verschillen.

Als je met één Bingokaart speelt, is de kans vrij klein dat je in 65 of minder trekkingen 'BINGO!' mag roepen. Die kans is 0,0154.

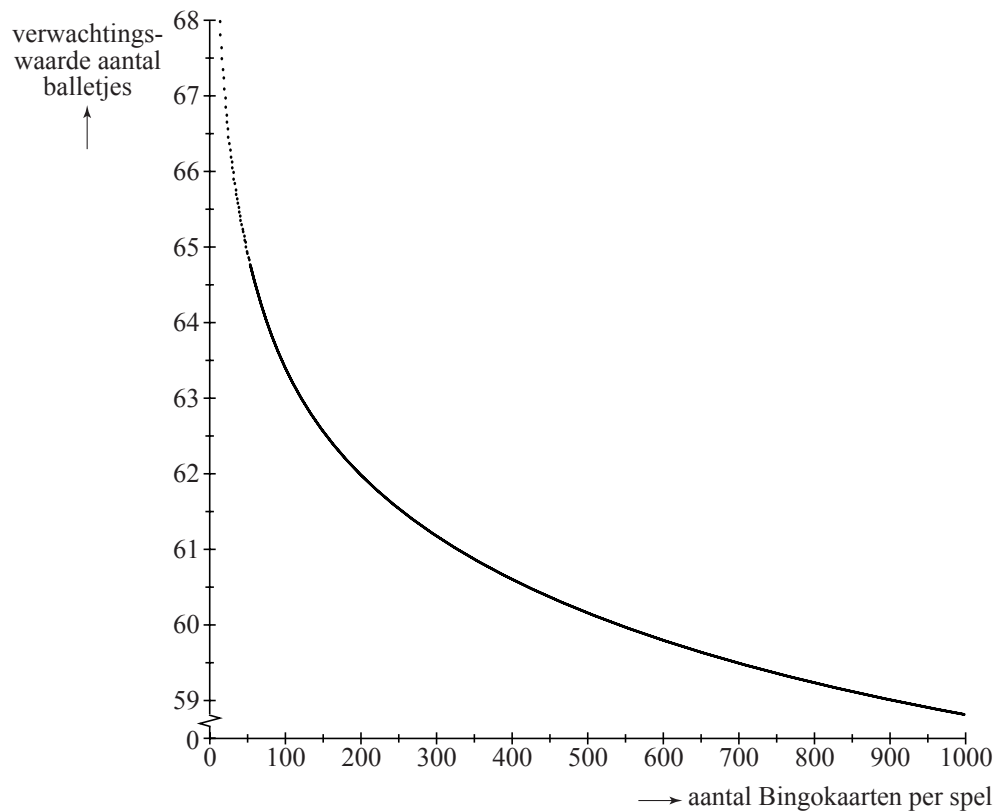
In een verzorgingstehuis wordt iedere maandagavond een bingoavond georganiseerd. Deze keer kopen 100 bewoners elk één kaart. Uit ervaring is gebleken dat bij een bingoavond na 65 trekkingen de meeste bewoners echt te moe zijn om zich te kunnen concentreren. Men besluit dus om maar maximaal 65 balletjes te trekken.

Aangezien er nu veel meer mensen meespelen, is de kans dat er binnen 65 trekkingen iemand 'BINGO!' zal roepen veel groter.

- 3p 12 Bereken de kans dat er op de bingoavond in het verzorgingstehuis toch geen prijs kan worden uitgekeerd.

Een spel Bingo wordt meestal met een groot aantal kaarten gespeeld. Dit aantal Bingokaarten per spel noemen we n . Voor elke n kan de verwachtingswaarde worden berekend van het aantal balletjes dat getrokken moet worden voordat de eerste 'BINGO!' wordt geroepen. Het resultaat van deze berekeningen is weergegeven in de grafiek van figuur 3.

figuur 3



Op de horizontale as staat het aantal Bingokaarten per spel en op de verticale as de verwachtingswaarde. In de grafiek kun je aflezen dat er bij een spel met 200 Bingokaarten naar verwachting ongeveer 62 balletjes getrokken moeten worden voordat de eerste 'BINGO!' wordt geroepen.

De grafiek in figuur 3 blijkt zeer goed te kunnen worden benaderd door de volgende formule:

$$\text{verwachtingswaarde} = 24 + \frac{50}{n^{0,0524}}$$

Hierbij is n het aantal kaarten dat aan een spel meedoet.

Met behulp van de formule kun je nauwkeurig berekenen hoeveel kaarten er per spel ten minste moeten worden gebruikt zodat naar verwachting 59 of minder balletjes getrokken hoeven te worden voor de eerste 'BINGO!'.

4p **13** Voer deze berekening uit.

Conditietest

Om de conditie te meten van mensen worden vaak conditietests gebruikt. De conditietest die in deze opgave vermeld wordt, is een gangbare conditietest waarbij iedere prestatie een score oplevert. Hoe hoger de score, hoe beter de conditie.

In Canada is een onderzoek gedaan onder een groot aantal jongens van 12 tot en met 17 jaar. In tabel 1 staan de resultaten van het onderzoek voor jongens van 17 jaar.

tabel 1

score	5,44	6,89	7,50	8,36	8,81	9,30	9,84	10,23	11,09	11,87	12,58
cumulatief percentage	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95

In tabel 1 is bijvoorbeeld af te lezen dat 90% van de jongens een score van 11,87 of minder behaalt. De scores in de tabel zijn gerangschikt op cumulatief percentage.

De scores van de Canadese jongens van 17 jaar zijn bij benadering normaal verdeeld. Dat kun je zien als je de scores van tabel 1 uitzet op normaal waarschijnlijkheidspapier.

- 3p **14** Zet de scores van tabel 1 uit op het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage en leg met behulp van deze tekening uit waarom er bij benadering sprake is van een normale verdeling.

Ook voor Canadese jongens in andere leeftijdsgroepen zijn de scores (bij benadering) normaal verdeeld.

Voor Canadese jongens van 13 jaar is het gemiddelde 7,4 en de standaardafwijking 2,0. Wanneer een jongen van 13 jaar hoger dan 9,94 scoort is er sprake van een **hoge score**.

- 4p **15** Uit de onderzochte groep worden willekeurig twee jongens van 13 jaar gekozen. Bereken de kans dat ze allebei een hoge score hebben.

Voor Canadese jongens van 14 jaar is het gemiddelde 8,0 en de standaardafwijking 2,0.

- 4p **16** We kiezen aselekt 100 Canadese jongens van 14 jaar. Bereken de kans dat hun gemiddelde score minder dan 0,1 afwijkt van 8,0.

Een Canadese gymnastiekdocent traint regelmatig jongens van 14 jaar om hun conditie te verbeteren. De gemiddelde score van deze leeftijdscategorie is 8,0 en de standaardafwijking is 2,0. De docent is van mening dat deze training daadwerkelijk helpt. Om dat na te gaan laat hij na een aantal trainingen 132 jongens van 14 jaar de conditietest doen. Het resultaat is dat deze jongens een gemiddelde score van 8,43 hebben gehaald.

- 6p **17** Onderzoek of deze gymnastiekdocent op grond van dit resultaat gelijk krijgt. Neem als significantieniveau 5%.

Containers

Nederland verscheept jaarlijks veel goederen naar het buitenland. Dit gebeurt grotendeels met grote zeeschepen die zijn uitgerust voor containervervoer. Het vervoer met containers is nog niet zo oud. Pas in de jaren zestig van de vorige eeuw kwam in Rotterdam het eerste schip vol containers binnen. Daarna is het containervervoer steeds belangrijker geworden.

foto

Binnenvaartschip met containers



Het aantal containers dat wordt geladen en gelost (ook wel containeroverslag genoemd) is in de haven van Rotterdam sinds 1983 met 130% toegenomen tot ongeveer 4 054 000 containers in 2002.

- 3p **18** Bereken hoeveel containers in 1983 geladen en gelost werden in de haven van Rotterdam.

Containers zijn er in verschillende maten. De inhoud van containers wordt uitgedrukt in TEU (Twenty-feet Equivalent Unit). Een container met een lengte van 20 feet (ruim 6 meter) heeft een inhoud van 1 TEU.

In 2005 bedroeg de containeroverslag in de haven van Rotterdam 9,3 miljoen TEU. Omdat producten steeds vaker op die plaatsen in de wereld worden gemaakt waar dat het goedkoopst is, verwacht men dat de containeroverslag in de haven van Rotterdam jaarlijks blijft groeien en wel met 7% per jaar.

- 4p **19** Bereken in welk jaar de containeroverslag in de haven van Rotterdam naar verwachting voor het eerst meer dan 17 miljoen TEU zal zijn.

Een vervoerder transporteert vanuit een containerterminal in Duitsland wekelijks minstens 1000 TEU naar Rotterdam. De vervoerder maakt gebruik van goederentreinen en binnenvaartschepen. Een goederentrein vervoert 80 TEU en een binnenvaartschip 50 TEU. De vervoerder heeft de beschikking over 15 binnenvaartschepen. Vanwege de lange reistijd op het traject Duitsland–Rotterdam–Duitsland kunnen deze elk wekelijks één keer ingezet worden. De vervoerder kan op maandag maximaal 3 goederentreinen laten rijden. Op dinsdag tot en met vrijdag heeft hij de beschikking over maximaal 2 goederentreinen per dag. In het weekend maakt hij geen gebruik van het spoor.

Stel dat hij per week g goederentreinen inzet en b binnenvaartschepen. Dan gelden voor g en b de volgende vijf beperkende voorwaarden: $g \geq 0$; $b \geq 0$; $g \leq 11$; $b \leq 15$ en $8g + 5b \geq 100$.

3p **20** Laat zien hoe de voorwaarden $g \leq 11$ en $8g + 5b \geq 100$ volgen uit de gegevens.

De vijf beperkende voorwaarden kunnen in het assenstelsel op de uitwerkbijlage worden getekend en vervolgens kan het toegestane gebied worden aangegeven. Houd hierbij rekening met het feit dat b en g alleen gehele getallen mogen zijn.

4p **21** Teken het toegestane gebied op de uitwerkbijlage.

Het transport van 80 TEU met een goederentrein kost 7000 euro. Het transport van 50 TEU met een binnenvaartschip kost 3500 euro. De vervoerder streeft naar zo laag mogelijke transportkosten.

5p **22** Toon aan dat er precies twee mogelijke oplossingen zijn waarvoor de transportkosten zo laag mogelijk zijn.