Wiskunde A1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **02**

Tijdvak 1
Dinsdag 28 mei
13.30–16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 2 en 3 is een bijlage toegevoegd.

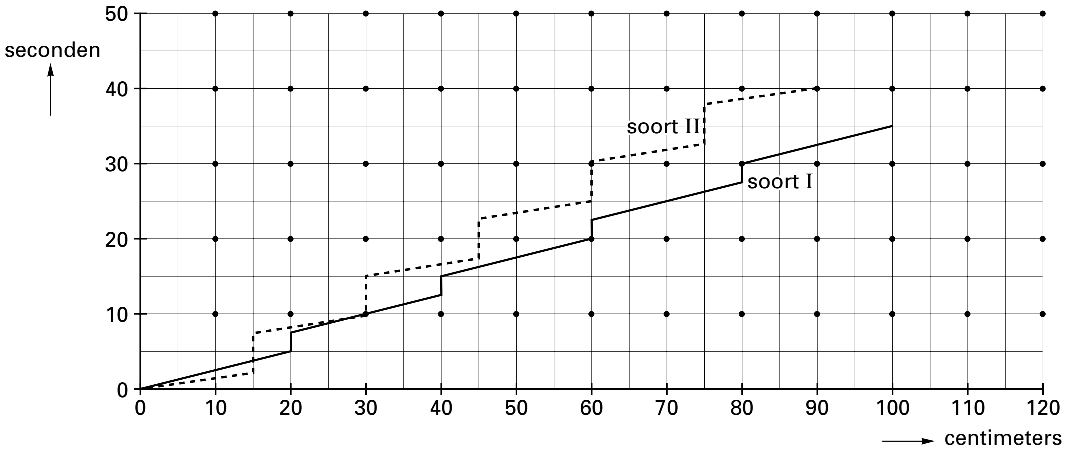
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vogels die voedsel zoeken

Vogels die voedsel zoeken op de grond vertonen vaak een karakteristiek patroon van lopen en stilstaan. In figuur 1 is dit patroon voor twee vogelsoorten schematisch weergegeven.

figuur 1



Het patroon van soort I heeft de volgende drie kenmerken:

- het stilstaan duurt telkens $2\frac{1}{2}$ seconden;
- tussen twee stops legt de vogel telkens 20 cm af;
- tussen twee stops loopt de vogel met een snelheid van 4 cm per seconde.

4p **1** ☐ Lees uit figuur 1 af wat deze drie kenmerken zijn van het patroon van soort II.

Om van een andere vogel (soort III) dit patroon te bepalen, is zo'n vogel gedurende een reeks van 24 keer lopen-en-stilstaan geobserveerd.
De vogel stond in totaal 180 seconden stil.
De afgelegde afstand was in totaal 480 cm.
Het geheel duurde 420 seconden.

5p **2** ☐ Teken in het assenstelsel op de bijlage een grafiek zoals figuur 1 van het patroon van deze vogel voor ten minste 45 seconden. Geef een toelichting.

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte.
Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In tabel 1 staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

tabel 1

400 waarnemingen bij pimpelmezen

hoogte in meters	<1,5	1,5–3	3–5	5–7	7–10	10–15	>15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

8p **3** ☐ Toon aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn; maak gebruik van het normaal waarschijnlijkheidspapier op je bijlage. Lees uit je tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in dm nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

De hoogtes waarop boomklevers en glanskoppen werden waargenomen, waren ook bij benadering normaal verdeeld. Per soort staan het gemiddelde en de standaardafwijking van deze waargenomen hoogtes in tabel 2 in meters vermeld.

tabel 2

soort	gemiddelde hoogte	standaardafwijking
boomklevers	10,0	4,0
glanskoppen	4,5	1,5

Uit de gegevens kun je afleiden dat ongeveer 15% van de boomklevers werd waargenomen op een hoogte tussen 6,0 en 8,0 meter.

4p **4** ☐ Toon aan met een berekening dat bij glanskoppen ook ongeveer 15% werd waargenomen op een hoogte tussen 6,0 en 8,0 meter.

Sparen

De ouders van Suze openen bij haar geboorte een spaarrekening voor haar. De rente op deze spaarrekening is 4% per jaar en we gaan er in deze opgave van uit dat dit 18 jaar lang zo blijft. Zij willen dat Suze 18 jaar later, op haar 18e verjaardag, de beschikking krijgt over dit geld. Er moet dan 10 000 euro op deze rekening staan.

foto **Suze leert sparen**

Suze's ouders overwegen twee mogelijkheden om voor haar te gaan sparen.
De eerste mogelijkheid is bij de geboorte van Suze eenmalig een bedrag te storten, zodanig dat dit na 18 jaar met rente is aangegroeid tot 10 000 euro.

4p **5** ☐ Bereken welk bedrag de ouders van Suze daartoe bij haar geboorte moeten storten.

De tweede mogelijkheid is om jaarlijks een vast bedrag te sparen. De eerste keer wordt bij de geboorte van Suze een bedrag gestort. Elk volgend jaar wordt op haar verjaardag weer datzelfde bedrag gestort. In totaal storten haar ouders 18 keer dat bedrag. Uiteindelijk moet er weer 10 000 euro op haar 18e verjaardag op de rekening staan.
De vader van Suze denkt te weten hoe hij het jaarlijkse bedrag b moet uitrekenen. Hij lost daartoe de volgende vergelijking op:

$$\frac{1{,}04^{18}-1}{1{,}04-1}\cdot b=10\,000$$

3p **6** ☐ Bereken de waarde van dit jaarlijkse bedrag b in deze vergelijking.

Later bedenkt Suze's vader dat de gevonden oplossing niet juist is. Hij komt daar achter, doordat hij bedenkt dat $\frac{1{,}04^{18}-1}{1{,}04-1}\cdot b$ hetzelfde is als de volgende optelling:

$$b\cdot 1{,}04^{17}+b\cdot 1{,}04^{16}+\ldots+b\cdot 1{,}04^{2}+b\cdot 1{,}04+b$$

Hij had zich laten misleiden doordat deze optelling wel het juiste aantal termen (namelijk 18) bevat. Toch geeft de oplossing b van de vergelijking niet het juiste jaarlijks te storten bedrag, omdat er na de laatste storting nog een jaar rente op de rekening wordt ontvangen.

5p **7** ☐ Bereken het juiste jaarlijks te storten bedrag, zodat Suze op haar 18e verjaardag 10 000 euro op haar rekening heeft staan.

Jongen of meisje

In 1988 vond het Onderzoek Gezinsvorming plaats. Hierbij werd onder andere de gezinssamenstelling onderzocht (hoeveel kinderen, hoeveel meisjes, enzovoort). Men waagde zich vervolgens ook aan voorspellingen hoe gezinnen in de toekomst samengesteld zullen zijn. Daarbij beperkten de onderzoekers zich tot een voorspelling over de gezinnen van vrouwen die geboren zijn in 1960. De resultaten staan in tabel 3.

tabel 3 **Verwachte uiteindelijke gezinssamenstelling van vrouwen geboren in 1960**

		% van alle vrouwen	% van vrouwen met kinderen
geen kinderen		18,5	
1	kind (totaal)	15,2	$\boxed{18{,}7}$
	1 jongen	7,9	9,7
	1 meisje	7,3	9,0
2	kinderen (totaal)	40,1	49,2
	2 jongens	10,1	12,4
	1 jongen en 1 meisje	20,9	25,6
	2 meisjes	9,1	11,2
3	kinderen (totaal)	18,2	22,3
	3 jongens	2,5	3,0
	2 jongens en 1 meisje	7,3	9,0
	1 jongen en 2 meisjes	6,3	7,7
	3 meisjes	2,1	2,6
4	of meer kinderen (totaal)	8,0	9,8
	uitsluitend jongens	0,5	0,6
	uitsluitend meisjes	0,5	0,6

Een gezin met zowel jongens als meisjes noemt men een gemengd gezin.

3p **8** ☐ Hoeveel procent van alle in 1960 geboren vrouwen zal volgens tabel 3 uiteindelijk een gemengd gezin hebben? Licht je antwoord toe.

In tabel 3 staat in de rechterkolom het getal 18,7.

3p **9** ☐ Laat zien hoe dit getal afgeleid kan worden uit de gegevens in de kolom met opschrift '% van alle vrouwen'.

Uit bevolkingsstatistieken van Nederland en andere West-Europese landen vanaf de 18e eeuw is duidelijk dat er steeds iets meer jongens dan meisjes geboren worden. We kunnen nagaan dat de gegevens in tabel 3 hiermee in overeenstemming zijn. We nemen daarbij 5000 gezinnen *met kinderen* als uitgangspunt. We kunnen nu een schatting maken van het totaal aantal jongens dat in de gezinnen met 1, 2 of 3 kinderen voorkomt. De gezinnen met 4 of meer kinderen laten we daarbij buiten beschouwing. We kunnen berekenen dat er in deze 5000 gezinnen in totaal meer jongens dan meisjes worden geboren.

6p **10** ☐ Voer deze berekening uit.

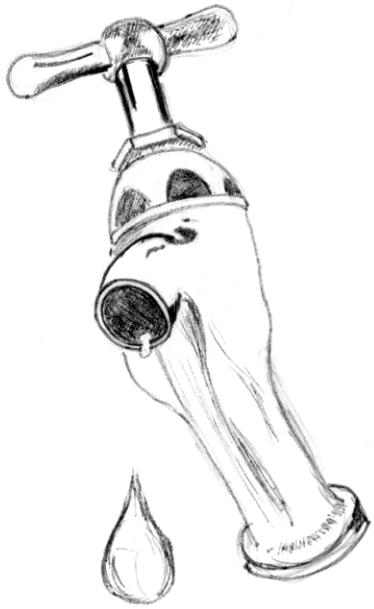
Neem voor de volgende vraag aan dat onder geboorte wordt verstaan de geboorte van één kind, dus geen twee- of meerlingen.
Neem aan dat de kans op een jongen bij elke geboorte 0,51 is en dat op een zekere dag 34 geboortes worden aangegeven bij een ambtenaar van de burgerlijke stand.

4p **11** ☐ Bereken de kans dat die dag evenveel jongens als meisjes worden aangegeven.

Leidingwater

Voor de levering van leidingwater brengen de waterleidingmaatschappijen elk jaar kosten in rekening. Deze kosten bestaan onder andere uit verbruikskosten, vastrecht en BTW.

tekening



In het jaar 1999 gaat de WMO, de Waterleiding Maatschappij Overijssel, bij de berekening van de kosten als volgt te werk:
- elke m^3 water kost f 2,45
- het vastrecht per jaar bedraagt f 30,–
- over de eerste f 60,– (inclusief het vastrecht) betaalt de afnemer 6% BTW en over de rest 17,5%.

In 1999 gebruikt het Overijsselse gezin Akink 130 m^3 water. Dit gezin betaalt hiervoor f 54,09 aan BTW.

3p **12** ☐ Laat door een berekening zien dat dit BTW-bedrag juist is.

Voor de berekening van de jaarlijkse kosten K_{1999} in het jaar 1999 kunnen we een formule opstellen. Deze formule ziet er, vanaf een bepaald jaarlijks verbruik, als volgt uit:

$$K_{1999} = 2{,}87875 \cdot x + 28{,}35$$

In deze formule is K_{1999} in guldens en is x het jaarlijks verbruik van water in m^3.

Deze formule is geldig voor elk jaarlijks verbruik, behalve wanneer dit erg laag is. Dat komt door het feit dat men 6% BTW over de eerste f 60,– betaalt en over de rest 17,5%.

4p **13** ☐ Bereken vanaf welk jaarlijks verbruik de formule voor K_{1999} geldig is.

Vanaf het jaar 2000 is de berekeningswijze voor de kosten veranderd. Het BTW-tarief is veranderd en bovendien is er de zogenoemde waterbelasting bijgekomen.
Dat is reden voor de WMO om de afnemers hierover in te lichten. In een folder schrijven zij op welke wijze de kosten in het jaar 2000 berekend worden.

In het jaar 2000 gaat men bij de berekening van de kosten als volgt te werk:
- elke m^3 water kost *f* 2,50
- het vastrecht per jaar bedraagt *f* 30,60
- over elke m^3 water betaalt de afnemer *f* 0,285 aan waterbelasting. Dit geldt alleen voor de eerste 300 m^3 water. Het verbruik boven de 300 m^3 is vrijgesteld van waterbelasting.
- over het totaal van deze bedragen betaalt de afnemer 6% BTW.

Het gezin Akink dat per jaar altijd 130 m^3 water verbruikt, moet volgens de nieuwe berekening *f* 13,62 meer betalen dan volgens de oude berekening, zo is na te rekenen. Het bedrag dat dit gezin aan BTW moet betalen is in 2000 echter lager dan in 1999. In 1999 betaalt het gezin Akink (zie vraag 12) *f* 54,09 aan BTW.

3p **14** ☐ Bereken voor dit gezin het BTW-verschil tussen 1999 en 2000.

Voor de berekening van de jaarlijkse kosten K_{2000} in het jaar 2000 moeten we onderscheid maken tussen een jaarlijks verbruik van ten hoogste 300 m^3 en een jaarlijks verbruik van meer dan 300 m^3.
Wanneer het jaarlijks verbruik ten hoogste 300 m^3 bedraagt, dan ziet een formule voor K_{2000} er als volgt uit:

$$K_{2000} = 2,9521 \cdot x + 32,436 \qquad \text{met } x \leq 300$$

Ook hier is K_{2000} in guldens en x het jaarlijks verbruik van water in m^3.

4p **15** ☐ Leid deze formule af.

Met de invoering van de waterbelasting wil de overheid het waterverbruik verminderen. Mevrouw Akink wil weten of de nieuwe berekeningswijze bij elk jaarverbruik van ten minste 130 m^3 een hoger bedrag oplevert dan de oude berekeningswijze.

6p **16** ☐ Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Lentevoordeelweken

Een supermarkt houdt elk jaar in de lente een actie onder de naam ’Lentevoordeelweken’. Tijdens die actie ontvangt iedere klant bij ten minste 50 euro aan boodschappen twee krasloten. Op elk kraslot staat één vakje. Als men dat openkrast, wordt de afbeelding van een kievitsei, een lammetje, een narcis of een vogelverschrikker zichtbaar.
De klant moet direct aan de kassa, voordat hij de supermarkt heeft verlaten, de twee opengekraste krasloten inleveren. Wanneer op beide krasloten dezelfde afbeelding staat, wint de klant een tegoedbon.
De kans op een tegoedbon hangt af van de verdeling van de vier afbeeldingen over de krasloten.

Neem aan dat de vogelverschrikker op 10% van de krasloten voorkomt en de andere drie afbeeldingen elk op 30% van de krasloten. De krasloten liggen, in willekeurige volgorde, op een stapel bij de kassa.
Een klant heeft zojuist twee krasloten ontvangen.

3p **17** ☐ Bereken de kans dat de klant met deze twee krasloten een tegoedbon wint.

De eigenaar van de supermarkt wil niet te veel tegoedbonnen weggeven. Daarom onderzoekt hij of een andere verdeling van de afbeeldingen over de krasloten gunstiger is. Hij gaat er daarbij van uit dat de vogelverschrikker met een kans k op de krasloten voorkomt en de overige drie afbeeldingen elk met een kans $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}k$. Daarmee kan hij uitrekenen hoe groot de kans is dat een klant met twee krasloten een tegoedbon wint. Die kans is gelijk aan:

$$\text{P(tegoedbon met twee krasloten)} = 1\tfrac{1}{3}k^2 - \tfrac{2}{3}k + \tfrac{1}{3}$$

Met behulp van deze formule kan de eigenaar nu onderzoeken voor welke waarde van k de kans op een tegoedbon zo klein mogelijk is.

4p **18** ☐ Voer dit onderzoek uit.

De eigenaar van de supermarkt overweegt de mogelijkheid om elke klant die ten minste 50 euro aan boodschappen besteedt, niet twee, maar drie krasloten te geven. De klant wint dan een tegoedbon wanneer ten minste twee keer de vogelverschrikker op deze drie krasloten voorkomt.
Veronderstel dat de vier afbeeldingen in gelijke mate verdeeld zijn over de krasloten.

5p **19** ☐ Bereken de kans dat een klant in deze situatie een tegoedbon wint.

Einde