wiskunde A1

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

2005

Tijdvak 1
Woensdag 25 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 16 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Meer neerslag

De laatste tijd komen er steeds meer aanwijzingen dat het klimaat op aarde verandert. Dit heeft onder andere gevolgen voor de jaarlijkse hoeveelheid neerslag in Nederland. Om een indruk te krijgen van die jaarlijkse hoeveelheid neerslag zijn in tabel 1 gegevens van vijf meetstations in de periode 1905-1998 weergegeven.

tabel 1

Gemiddelde jaarlijkse hoeveelheid neerslag gedurende de periode 1905-1998

	De Bilt	Gemert Volkel	Leeuwarden	Hoofddorp	Winterswijk
gemiddelde (mm)	783	711	753	768	768
standaardafwijking (mm)	139	123	106	127	136

We nemen aan dat de jaarlijkse hoeveelheid neerslag bij elk van de meetstations normaal verdeeld is.

We bekijken de kans dat er in een jaar meer dan 950 mm neerslag valt. Weerkundigen veronderstelden tot voor kort dat dergelijke kansen in de loop van de jaren niet veranderen.

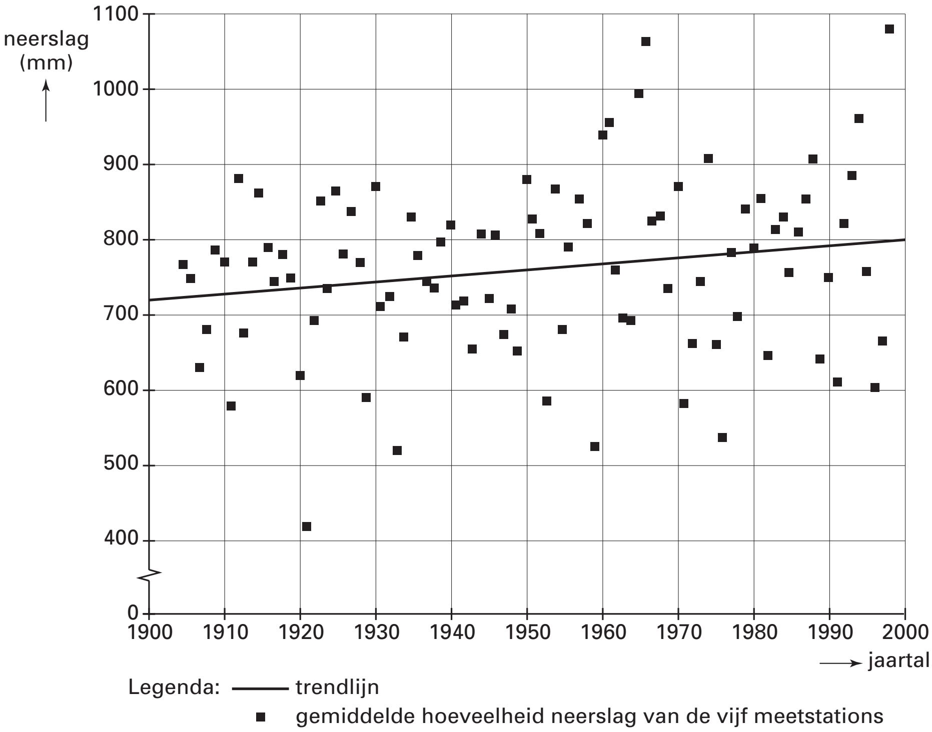
Op grond van het bovenstaande kunnen we nagaan of deze kans in Winterswijk groter is dan in Hoofddorp zonder deze kans uit te rekenen.

4p **1** ☐ Geef aan in welk van beide plaatsen de kans dat er in een jaar meer dan 950 mm neerslag valt, het grootst is. Motiveer je antwoord zonder daarbij deze kans uit te rekenen.

3p **2** ☐ Bereken de kans dat in een jaar in Leeuwarden meer dan 950 mm neerslag valt.

Zoals gezegd veronderstelden weerkundigen tot voor kort dat kansen op bepaalde hoeveelheden neerslag in de loop van de jaren niet veranderen. Inmiddels is men tot het inzicht gekomen dat er sprake is van een trend: de jaarlijkse hoeveelheid neerslag in Nederland neemt langzaam toe. In figuur 1 is voor elk jaar de gemiddelde hoeveelheid neerslag van de vijf meetstations met een blokje aangegeven. Bovendien is daarbij de zogenaamde *trendlijn* getekend. De trendlijn volgt zo goed mogelijk de gemiddelde jaarlijkse hoeveelheid neerslag. De trendlijn kan worden gebruikt om een schatting te maken van de te verwachten hoeveelheid neerslag in de komende jaren.

figuur 1



We veronderstellen dat de te verwachten jaarlijkse hoeveelheid neerslag N in mm in de toekomst lineair zal blijven toenemen. N kan dan worden geschreven als een functie van het aantal jaren t dat is verstreken vanaf 1900.

5p **3** ☐ Stel een formule op voor N en bereken daarmee in welk jaar de hoeveelheid neerslag volgens de trendlijn voor het eerst groter zal zijn dan 850 mm.

Er zijn ook andere manieren om te onderzoeken of het gedurende de afgelopen eeuw 'natter' is geworden. We kunnen kijken naar de 5 'natste' jaren. Deze zijn in figuur 1 af te lezen, namelijk 1961, 1965, 1966, 1994 en 1998. Het blijkt dat de 5 'natste' jaren allemaal na 1951 vielen, dus in de tweede helft van de periode 1905-1998.
Stel dat je 5 jaren willekeurig kiest uit deze periode van 94 jaar. De kans dat je uitsluitend jaren uit de tweede helft van de periode kiest, is klein.

4p **4** ☐ Bereken deze kans. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Een andere maat voor de 'natheid' van een jaar is het aantal maanden van dat jaar dat de neerslag boven een bepaalde waarde, de grenswaarde, komt. Die grenswaarden zijn 30, 40, 50, …, 130 mm. Met de gegevens over de periode 1905-1998 is tabel 2 gemaakt.

tabel 2

Gemiddeld aantal maanden per jaar met grenswaardenoverschrijding

grenswaarde neerslag (mm)	>30	>40	>50	>60	>70	>80	>90	>100	>110	>120	>130
gemiddeld aantal maanden per jaar	10,2	9,2	7,9	6,5	5,4	3,8	2,7	1,9	1,4	1,1	0,6

Uit tabel 2 lezen we bijvoorbeeld af dat het aantal maanden per jaar waarin meer dan 60 mm neerslag viel, gemiddeld 6,5 bedroeg.
Men spreekt van een *extreem nat jaar* als meer dan 9 van deze grenswaarden vaker worden overschreden dan de overeenkomstige waarde in tabel 2.

De gegevens van De Bilt over 2001 zijn weergegeven in tabel 3.

tabel 3

Maandelijkse hoeveelheid neerslag in De Bilt in 2001

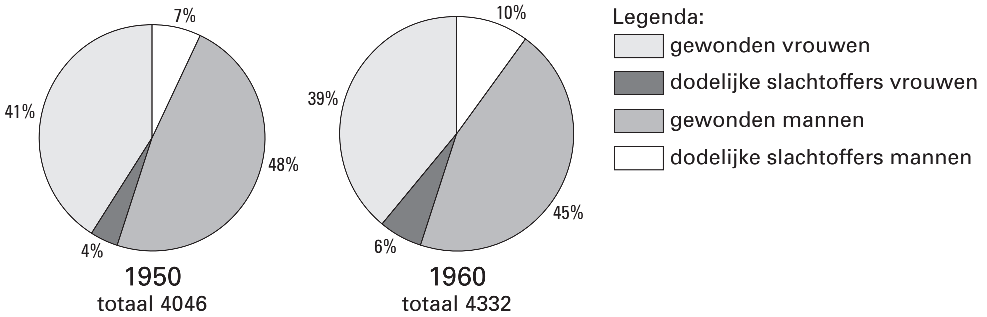
maand	jan	feb	mrt	apr	mei	juni	juli	aug	sep	okt	nov	dec
neerslag (mm)	71	89	74	87	29	54	87	116	211	41	85	94

4p **5** ☐ Onderzoek of 2001 voor De Bilt een extreem nat jaar was.

Breedte van wegen

In figuur 2 zie je enkele gegevens van de staat Wisconsin die betrekking hebben op het aantal verkeersslachtoffers in de jaren 1950 en 1960.
De gegevens zijn verdeeld over vier categorieën.

figuur 2



In de figuur zie je dat het percentage dodelijke slachtoffers bij de mannen en bij de vrouwen is gestegen.

5p **6** □ Ga door een berekening na of de relatieve toename van het aantal dodelijke slachtoffers bij de mannen groter is dan bij de vrouwen.

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken.
Daarom stelde Gerlough de zogenaamde ‘veilige norm’ op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto’s dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum geven we hier aan met N_{max} en is afhankelijk van de breedte van de weg. Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto’s mogen passeren dan bij een smalle weg. Gerlough kwam tot de volgende formule:

$$N_{\text{max}} = \frac{8289{,}3 \cdot (1{,}778 - \log B)}{B}$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kunnen we enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Een weg is 5,40 meter breed. Tijdens de spits passeren er 1740 auto’s per uur.

3p **7** □ Voldoet deze weg aan de veilige norm? Licht je antwoord toe.

De formule van Gerlough heeft alleen betekenis als N_{max} positief is.

3p **8** □ Bereken voor welke waarden van B dit het geval is. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Een weg waarover volgens de veilige norm per uur maximaal 1648 auto’s mogen passeren, wordt 0,50 meter smaller gemaakt. Dit heeft tot gevolg dat het maximum aantal auto’s dat per uur mag passeren groter wordt.

5p **9** □ Bereken hoeveel auto’s er per uur méér mogen passeren in de nieuwe situatie.

Leugendetector

In het tijdschrift Nature stond enige tijd geleden een artikel waarin de werking van een leugendetector werd uitgelegd. Iemand die liegt, krijgt een nauwelijks waarneembaar 'blosje' in het gezicht. De leugendetector probeert dit blosje waar te nemen. Volgens het artikel is de leugendetector een belangrijk hulpmiddel om na te gaan of iemand liegt.
Met de leugendetector zijn veel experimenten uitgevoerd. Daaruit is gebleken dat de leugendetector niet altijd foutloos werkt. Zo wordt in slechts 75% van de gevallen een leugenaar daadwerkelijk als leugenaar herkend.
We nemen aan dat voor iedere leugenaar geldt dat de kans dat deze correct als leugenaar herkend wordt, gelijk is aan 0,75.

4p **10** ☐ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat de leugendetector bij 200 leugenaars 40 of meer fouten maakt.

Ook bij eerlijke mensen (mensen die niet liegen) werkt de leugendetector niet altijd foutloos. Gemiddeld blijkt de leugendetector 1 van de 12 eerlijke mensen toch als leugenaar te bestempelen.
We bekijken een groep van 100 personen, bestaande uit 40 leugenaars en 60 eerlijke mensen. Je kunt narekenen dat de leugendetector naar verwachting bij 85 personen uit deze groep de juiste conclusie zal trekken. Men spreekt in dit geval van een *betrouwbaarheid* van 85% voor deze groep.

De betrouwbaarheid hangt af van de samenstelling van de groep. Wanneer we een groep van 100 personen nemen met daarin 16 leugenaars, krijgen we een andere waarde voor de betrouwbaarheid.

3p **11** ☐ Bereken hoe groot de betrouwbaarheid dan is.

De leugendetector kan ook worden ingezet bij grootscheepse controles, zoals op vliegvelden. Daar moeten alle passagiers antwoord geven op de vraag of ze iets hebben aan te geven. Niet iedereen antwoordt naar waarheid.

Veronderstel dat 0,4% van alle passagiers niet naar waarheid antwoordt en dus liegt. Dan kan berekend worden dat 8,3% van alle passagiers eerlijk is en door de leugendetector toch als leugenaar bestempeld wordt.
Deze informatie vinden we terug in tabel 4:

tabel 4

		werkelijkheid	
		eerlijke passagier	leugenaar
oordeel leugendetector	eerlijke passagier	91,3%	0,1%
	leugenaar	8,3%	0,3%

4p **12** ☐ Bereken de kans dat een passagier die door de leugendetector als leugenaar wordt bestempeld, ook werkelijk een leugenaar is. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Vijvertest

Vijverbezitters kunnen tegenwoordig bij een tuincentrum laten onderzoeken of het water in hun vijver van goede kwaliteit is. Met een eenvoudige test kan van het water zowel de hardheid, aangegeven met *KH* (carbonaathardheid), als de zuurgraad, aangegeven met *pH*, worden vastgesteld. Deze twee waarden bepalen op hun beurt het CO_2-gehalte van het water. Het CO_2-gehalte, dat we in deze opgave zullen aangeven met *C*, is een belangrijke indicator voor de kwaliteit van het vijverwater. Met behulp van tabel 5 kan bij gegeven *KH* en *pH* de waarde van *C* worden bepaald.

tabel 5 **CO_2-gehalte *C* in mg per liter**

		pH					
		6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
KH	12	480,0	191,1	76,1	30,3	12,1	4,8
	10	400,0	159,2	63,4	25,2	10,0	4,0
	8	320,0	127,4	50,7	20,2	8,0	3,2
	6						
	5	200,0	79,6	31,7	12,6	5,0	2,0
	4	160,0	63,7	25,4	10,1	4,0	1,6
	3	120,0	47,7	19,0	7,6	3,0	1,2
	2	80,0	31,8	12,7	5,0	2,0	0,8

De waarde van *KH* wordt in gehele getallen weergegeven; de waarde van *pH* wordt altijd met een nauwkeurigheid van 0,1 weergegeven.
Uit de tabel lezen we bijvoorbeeld af dat voor vijverwater met *KH* = 5 en *pH* = 7,2 geldt: *C* = 12,6.

Als je voor *pH* een vaste waarde kiest, dan hangt *C* alleen nog maar af van *KH*. In de kolommen van de tabel is te zien dat bij iedere vaste waarde van *pH* er een lineair (en zelfs evenredig) verband is tussen *KH* en *C*.

In de tabel is de rij die hoort bij *KH* = 6 leeg gelaten.

3p **13** ☐ Bereken welk getal er moet komen te staan op de plaats die hoort bij *KH* = 6 en *pH* = 6,8.

Als je voor *KH* een vaste waarde kiest, dan hangt *C* alleen nog maar af van *pH*. Bij iedere vaste waarde van *KH* bestaat er een exponentieel verband tussen *pH* en *C*: als *pH* met 1 toeneemt, neemt *C* met 90% af.

Bekijk de rij die hoort bij *KH* = 4.

4p **14** ☐ Laat door middel van berekeningen zien dat *alle* waarden van *C* in deze rij in overeenstemming zijn met het bovengenoemde exponentiële verband tussen *pH* en *C* en met de genoemde afname met 90%.

Volgens de folder is het water in een vijver van goede kwaliteit als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

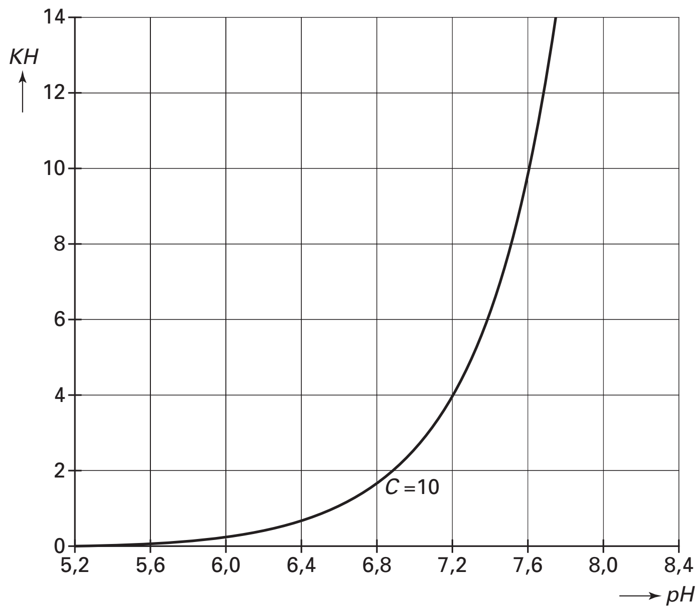
(I) de KH-waarde van het water moet ten minste 6 en ten hoogste 10 zijn
(II) de pH-waarde van het water moet ten minste 7 en ten hoogste 8 zijn
(III) de C-waarde van het water moet ten minste 10 zijn.

Een vijverbezitter laat zijn vijverwater testen. Bij de test worden de volgende waarden gemeten: $pH = 7$ en $KH = 8$. Op basis van tabel 5 kan de bijbehorende waarde voor C worden berekend. Vervolgens kan worden nagegaan of voldaan is aan de drie voorwaarden voor goede waterkwaliteit.

4p **15** ☐ Bereken deze bijbehorende waarde van C en onderzoek daarmee of dit vijverwater van goede kwaliteit is.

In folders waarin voorlichting gegeven wordt over de kwaliteit van vijverwater, zou men tabel 5 kunnen afdrukken. Maar daarin staat slechts een beperkt aantal waarden van KH en pH. Een formule zal men in zulke folders niet graag gebruiken. Vandaar dat vaak gekozen wordt voor een ‘plaatje’. In figuur 3 is begonnen met het maken van zo’n plaatje. Bij elk punt in figuur 3 hoort een waarde van pH en van KH. Deze bepalen de waarde van C, net als in tabel 5. In figuur 3 is een kromme getekend. Daarop liggen alle punten waarvoor geldt dat $C = 10$, zoals bijvoorbeeld het punt met $pH = 7{,}6$ en $KH = 10$ dat we al kennen uit tabel 5.

figuur 3



Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. Om deze figuur bruikbaar te maken voor een voorlichtingsfolder, moet hierin het gebied worden aangegeven dat bestaat uit alle punten waarvoor de waarden van pH, KH en C voldoen aan de voorwaarden (I), (II) en (III) voor vijverwater van goede kwaliteit.

4p **16** ☐ Geef dit gebied in de figuur op de uitwerkbijlage duidelijk aan. Licht je werkwijze toe.

Leesbaarheid

Overheidsinstellingen geven vaak schriftelijk informatiemateriaal uit, zoals folders en brochures. Het is van belang dat mensen die dit materiaal lezen, goed begrijpen wat er staat. Men heeft verschillende formules ontwikkeld om te bepalen hoe moeilijk een tekst te begrijpen is.

In 1952 introduceerde Robert Gunning de Fog-index. Deze index wordt nog steeds veel gebruikt.
De Fog-index F is een maat voor de moeilijkheid van een tekst. Naarmate een tekst moeilijker is, is de Fog-index F groter. De waarde van F wordt bepaald door:
w: het gemiddelde aantal woorden per zin en
l: het gemiddelde aantal lange woorden per zin (lange woorden zijn woorden van drie of meer lettergrepen).

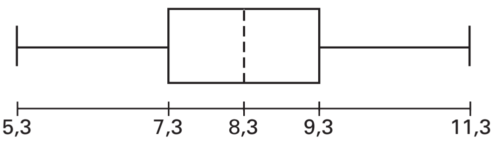
De bijbehorende formule is: $F = 0{,}4 \cdot w + 40 \cdot \dfrac{l}{w}$

Een tekst bestaat uit 95 zinnen met in totaal 1178 woorden, waarvan 159 lange woorden.

4p **17** ☐ Bereken de Fog-index van deze tekst. Rond je antwoord af op één decimaal.

Van 12 folders worden de gevonden F-waarden weergegeven in een boxplot. Zie figuur 4.

figuur 4



Van de 12 F-waarden zijn er 11 als volgt: 5,3; 6,4; 7,2; 7,4; 8,1; 8,3; 8,3; 9,1; 9,3; 9,3 en 11,3.

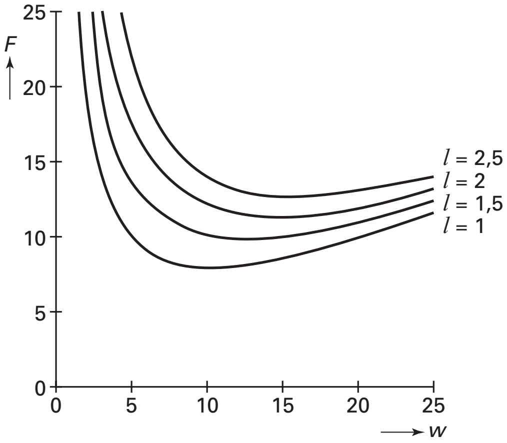
5p **18** ☐ Geef een mogelijke F-waarde die – samen met de 11 gegeven waarden – de boxplot van figuur 4 oplevert. Licht je antwoord toe.

Bij een onderzoek worden twee teksten, tekst A en tekst B, met elkaar vergeleken. Beide teksten hebben gemiddeld 2 lange woorden per zin: $l = 2$. Tekst A heeft korte zinnen met gemiddeld weinig woorden: $w = 10$, terwijl tekst B lange zinnen heeft. Toch hebben beide teksten dezelfde Fog-index.

5p **19** ☐ Bereken de waarde van w voor tekst B.

Vaak kun je in een tekst veel korte woorden toevoegen of juist weglaten, zonder dat de betekenis van de tekst ingrijpend gewijzigd wordt. Dan verandert *w*, terwijl *l* gelijk blijft. Anders gezegd: voor elke vaste waarde van *l* is *F* een functie van *w*. In figuur 5 is voor enkele waarden van *l* de bijbehorende grafiek van *F* getekend. Je ziet dat de grafiek van *F* eerst daalt en vervolgens stijgt. De grafiek van *F* heeft dus steeds een minimum.

figuur 5



Een tekstschrijver weet uit ervaring dat zijn teksten gemiddeld 2,6 lange woorden per zin hebben. Hij wil graag dat zijn teksten zo eenvoudig mogelijk zijn.

4p **20** ☐ Bereken wat het gemiddeld aantal woorden per zin in zijn tekst in dat geval moet zijn. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere manier om de Fog-index van een tekst te berekenen is als volgt:

$$F = 0,4\left(k + l + 100 \cdot \frac{l}{k+l}\right)$$

Hierbij is k het gemiddelde aantal korte woorden per zin, met andere woorden: $k + l = w$.

Uit deze formule is de oorspronkelijke formule $F = 0,4 \cdot w + 40 \cdot \frac{l}{w}$ af te leiden.

3p **21** ☐ Geef deze afleiding.

Einde