wiskunde A1

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 06

Tijdvak 2
Woensdag 21 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Fooi

Sandra is serveerster in een café. Gedurende 100 werkdagen heeft Sandra bijgehouden welk bedrag aan fooien ze op die dagen heeft gekregen. Het resultaat hiervan zie je in tabel 1.

tabel 1

bedrag aan fooien per dag, in euro's	0 tot 5	5 tot 10	10 tot 15	15 tot 20	20 tot 25
aantal dagen	2	17	48	29	4

Aan de hand van de tabel kun je een schatting maken van het totale bedrag aan fooien dat Sandra in die 100 dagen heeft ontvangen.

3p **1** ☐ Maak een schatting van dat bedrag.

Sandra heeft niet alleen bijgehouden welk bedrag aan fooien ze krijgt, maar ook hoeveel klanten haar een fooi geven. Daaruit bleek dat 80% van haar klanten een fooi geeft. We gaan ervan uit dat dit percentage ook geldt voor de klanten die Sandra in de komende tijd zal gaan bedienen.

3p **2** ☐ Bereken de kans dat van de eerstvolgende 10 klanten van Sandra er hoogstens 8 een fooi geven.

In de Verenigde Staten is men gewend in cafés en restaurants flinke fooien te geven. De psycholoog L. Green heeft onderzocht in welke mate de hoogte van de fooi afhangt van het bedrag van de rekening. Voor rekeningen tussen 3 en 100 dollar bleek het volgende verband te bestaan:

$$F = 0{,}127 \cdot R + 1{,}21$$

In deze formule is F de hoogte van de fooi in dollars en R het bedrag van de rekening in dollars.

Met behulp van deze formule kun je bij elke rekening de hoogte van de fooi uitrekenen. Dan kan daarmee worden berekend hoeveel procent de fooi is van het bedrag van de rekening. Bij een rekening van 4 dollar is dit percentage hoger dan bij een rekening van 90 dollar.

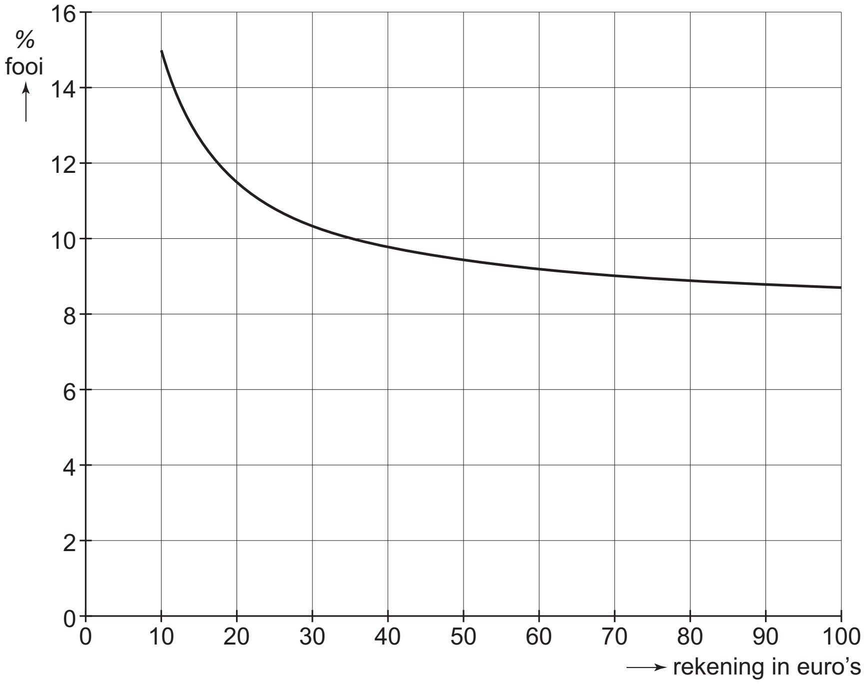
4p **3** ☐ Bereken deze beide percentages.

We kijken nu naar de situatie waarin 4 mensen hebben gegeten in een restaurant. Zij kunnen op twee manieren de rekening betalen:
I: Ze vragen samen één rekening.
II: Ze vragen voor ieder afzonderlijk een rekening.
Veronderstel dat ze de rekening betalen met een fooi volgens bovenstaande formule.
Degene die de fooi ontvangt, krijgt bij manier I niet dezelfde fooi als bij manier II.

4p **4** ☐ Beredeneer welk van beide manieren het grootste bedrag aan fooien oplevert.

Niet alleen in de Verenigde Staten maar ook in Nederland is onderzoek uitgevoerd naar de hoogte van fooien. Voor rekeningen tussen 10 euro en 100 euro staat in figuur 1 hoeveel procent fooi er gemiddeld gegeven wordt.
In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat bij een rekening van 20 euro de Nederlander gemiddeld 11,5% fooi geeft.

figuur 1



Voor Nederland bestaat er, vergelijkbaar met de Verenigde Staten, een lineaire formule $F = a \cdot R + b$ die het verband aangeeft tussen het bedrag van de rekening R in euro's en de hoogte van de fooi F in euro's.
Met behulp van figuur 1 kun je narekenen dat voor deze formule geldt: $a \approx 0,08$.
Daarmee kun je dan ook b berekenen. Daarvoor moet je natuurlijk eerst voor enkele waarden van R de hoogte van de fooi berekenen.

5p **5** ☐ Laat met een berekening zien dat uit figuur 1 volgt dat a inderdaad (ongeveer) 0,08 is en bereken de waarde van b.

Varkenspest

Eind januari 1997 brak in Nederland de varkenspest uit. Om verspreiding van de ziekte te voorkomen is elk bedrijf waar deze ziekte werd geconstateerd, geruimd. Dat hield in dat alle varkens van zo'n bedrijf werden afgevoerd.
Vanaf het begin publiceerde het Ministerie van Landbouw, Natuurbeheer en Visserij wekelijks bij hoeveel bedrijven er tot dan toe varkenspest was geconstateerd. Dit noemen we het aantal besmette bedrijven. De eerste telling op vrijdag 7 februari 1997 (we noemen dat $n = 0$) leverde 4 besmette bedrijven op. Vier weken later waren er in totaal 37 bedrijven besmet. Dat betekent dus dat er in de periode van 7 februari – 7 maart bij 33 bedrijven varkenspest werd ontdekt.
In tabel 2 zie je enkele resultaten van die tellingen.

tabel 2

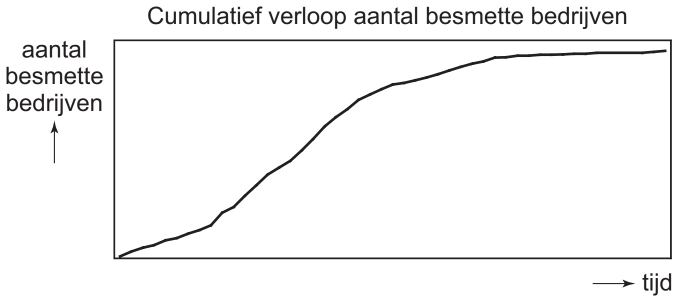
einddatum week	7 februari	7 maart	4 april	2 mei
aantal weken vanaf het begin	$n = 0$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 12$
aantal besmette bedrijven	4	37	68	151

Je kunt narekenen dat het aantal besmette bedrijven in de periode 7 maart – 4 april relatief minder toenam dan in de periode 4 april – 2 mei.

4p **6** ☐ Ga dit na door te berekenen met hoeveel procent het aantal besmette bedrijven toenam in elk van beide perioden.

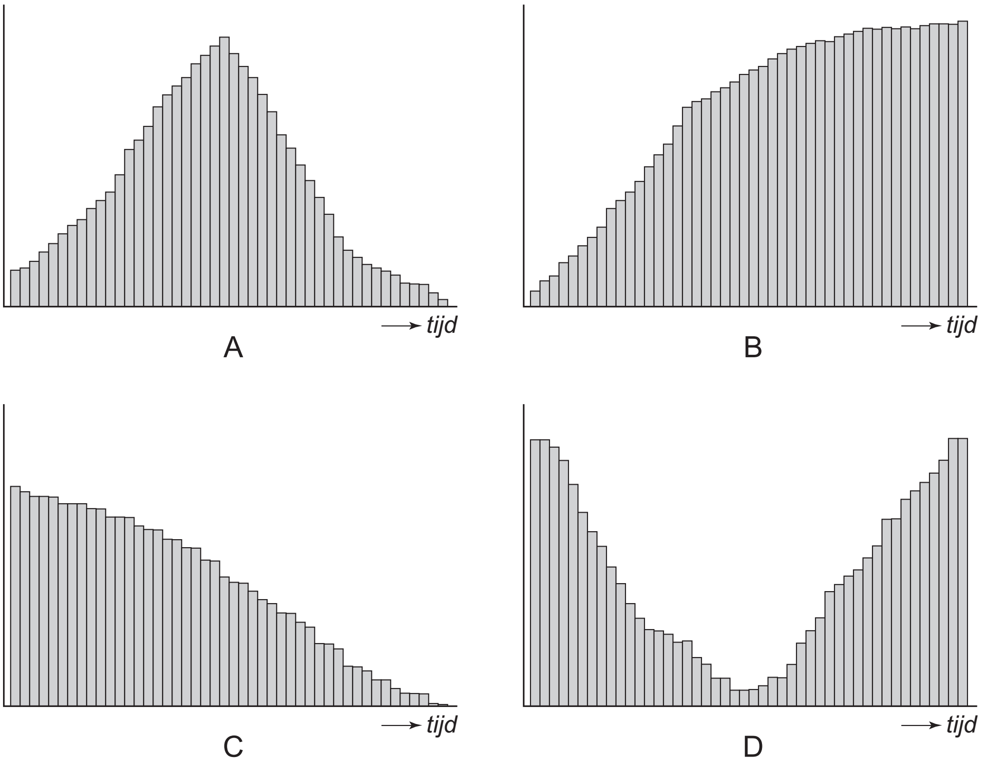
Het resultaat van de wekelijkse tellingen zie je in figuur 2 weergegeven in de vorm van een globale grafiek. De tijd waarop deze grafiek betrekking heeft, beslaat bijna een jaar.

figuur 2



Het resultaat van de wekelijkse tellingen kunnen we ook weergeven in een toenamendiagram.
In figuur 3 op de volgende bladzijde staan vier toenamendiagrammen over dezelfde periode als waarover figuur 2 is getekend. De wekelijkse toename van het aantal besmette bedrijven wordt met staafjes aangegeven.

figuur 3



Eén van deze vier toenamendiagrammen past goed bij figuur 2.

3p **7** ☐ Welke van de vier past goed bij figuur 2? Licht je antwoord toe.

Begin april 1997 zocht men naar een model waarmee het verdere verloop van de varkenspest voorspeld zou kunnen worden. Op basis van de aantallen besmette bedrijven voor $n = 0$, $n = 4$ en $n = 8$ kwam men tot de volgende recursieformule:

$$B_{n+1} = -0{,}012 \cdot B_n^{\,2} + 1{,}85 \cdot B_n \qquad \text{met } B_0 = 4$$

In deze formule is B_n het aantal besmette bedrijven na n weken, gerekend vanaf 7 februari 1997.

Wanneer we met behulp van de GR de eerste afgeronde waarden van B_n volgens dit model berekenen en vergelijken met de werkelijke aantallen uit tabel 2, krijgen we tabel 3.

tabel 3

n	0	1	2	3	4	8
B_n	4	7	13	22	34	70
werkelijk aantal	4				37	68

Je ziet dat voor $n = 0$, $n = 4$ en $n = 8$ de waarden volgens het model redelijk goed overeenkomen met de werkelijke waarden.
Voor hogere waarden van n geeft het model uitkomsten die nogal afwijken van de werkelijkheid. Voor bijvoorbeeld $n = 12$ is de afwijking al heel groot.

4p **8** ☐ Bereken hoeveel het aantal besmette bedrijven volgens dit model afwijkt van het werkelijke aantal op 2 mei 1997.

Een ander model waarmee het verdere verloop van de varkenspest in april 1997 voorspeld zou kunnen worden, is gebaseerd op exponentiële groei. Met de aantallen besmette bedrijven op $n = 4$ en $n = 8$ uit tabel 2 kan de groeifactor worden bepaald.

4p **9** ☐ Geef een schatting, op basis van deze exponentiële groei, van het aantal besmette bedrijven op $n = 16$.

Zeep

De firma Sanove fabriceert stukken zeep. De stukken zeep worden machinaal gemaakt. De machine is zo ingesteld dat het gewicht van de stukken zeep normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.

Volgens de norm die Sanove hanteert, mag het gewicht van hoogstens 2% van de stukken zeep minder dan 90 gram zijn.

4p **10** □ Ga met een berekening na of Sanove met de genoemde instellingen voldoet aan deze norm.

figuur 4

Het kan gebeuren dat de machine niet goed functioneert. Dan hebben te veel stukken zeep niet het gewenste gewicht. De afdeling Quality Control (QC) van Sanove gebruikt verschillende manieren om dit te controleren. Enkele van deze manieren komen hier aan de orde.

Wanneer het gemiddelde gewicht van de stukken zeep te laag is, mag de zeep niet verkocht worden. De afdeling QC neemt daarom elk uur uit de productie van dat uur aselect vijf stukken zeep. De productie van dat uur wordt afgekeurd wanneer het totale gewicht van de vijf stukken zeep minder is dan 460 gram.
Neem aan dat de machine in orde is, dus stukken zeep maakt waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.
Dan is het toch mogelijk dat van een zeker uur de productie wordt afgekeurd.

5p **11** □ Bereken de kans dat dit gebeurt.

De machine mag niet te veel stukken zeep afleveren waarvan het gewicht te laag of te hoog is. Om dit te controleren neemt QC elke dag aselect tien stukken zeep. Wanneer het gewicht van alle tien stukken zeep aan dezelfde kant van het gemiddelde zit, dus alle tien stukken zeep wegen meer dan 93 gram of alle tien stukken zeep wegen minder dan 93 gram, moet de machine opnieuw worden ingesteld.
Neem weer aan dat de machine in orde is, dus stukken zeep maakt waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.
Dan kan het toch gebeuren dat QC na het controleren van de tien stukken zeep de machine opnieuw laat instellen.

4p **12** □ Bereken de kans dat dit gebeurt.

De tien aselect gekozen stukken zeep worden door QC ook nog op een andere manier gecontroleerd. Hierbij wordt gelet op stukken zeep die veel te licht of veel te zwaar zijn. Als van de tien stukken zeep er minstens één is waarvan het gewicht meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van het gemiddelde, wordt de machine opnieuw ingesteld.

5p **13** □ Bereken de kans dat QC de goed ingestelde machine om deze reden opnieuw laat instellen.

Snelheden

In september 2003 won de Keniaan Rono een hardloopwedstrijd over een afstand van 2000 meter. Hij liep deze afstand in 4 minuten en 57,76 seconden. Dat betekent dat Rono die afstand liep met een gemiddelde snelheid van ongeveer 24,18 km/uur.
Het is gebruikelijk om tijden als 4 minuten en 57,76 seconden te noteren als 4:57.76.

Met deze prestatie behaalde Rono geen wereldrecord. Dat stond op dat moment op naam van de Marokkaan El Guerrouj. Zijn recordtijd op de 2000 meter was 4:44.79.

3p **14** ☐ Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur waarmee El Guerrouj dit wereldrecord liep. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

In tabel 4 staan de wereldrecords hardlopen bij de mannen tot en met september 2003 op een aantal afstanden.

tabel 4

Afstand (in meters)	Tijd	Gemiddelde snelheid (in km/uur)
100	9.78	36,8
200	19.32	37,3
400	43.18	33,3
800	1:41.11	28,5
1000	2:11.96	27,3
1500	3:26.00	26,2
2000	4:44.79	25,3
3000	7:20.67	24,5
5000	12:39.36	23,7
10 000	26:22.75	22,7

In de tabel zie je bijvoorbeeld dat het wereldrecord op de 1000 meter 2:11.96 was. Afgerond op één decimaal was daarbij de gemiddelde snelheid 27,3 km/uur.

Het verband tussen de afstanden en de gemiddelde snelheden uit tabel 4 kunnen we benaderen met de volgende formule:

$$v = \frac{200 \cdot a}{(44 \cdot a^2 + 1)} - 0,07 \cdot a + 23$$

In deze formule is v de gemiddelde snelheid in km/uur en a de afstand in *kilometer*.

De gemiddelde snelheden volgens deze formule komen niet precies overeen met de uitkomsten uit tabel 4.

3p **15** ☐ Bereken voor de 3000 meter (dus voor $a = 3$) hoeveel de gemiddelde snelheid volgens de formule afwijkt van de uitkomst uit de tabel.

Met de formule kun je bij elke afstand boven de 100 meter de gemiddelde snelheid berekenen die hoort bij het denkbeeldig gelopen wereldrecord. Voor bijvoorbeeld een afstand van 2283 meter zou het wereldrecord met een gemiddelde snelheid van 24,82 km/uur zijn gelopen.

3p **16** ☐ Bereken op welke afstand het denkbeeldige wereldrecord een gemiddelde snelheid van precies 30 km/uur op zou leveren.

In tabel 4 is de gemiddelde snelheid het hoogst bij de 200 meter. De formule van v is niet maximaal bij de 200 meter, maar bij een afstand tussen 100 en 200 meter.

3p **17** ☐ Bereken in meters nauwkeurig bij welke afstand de gemiddelde snelheid zo groot mogelijk is volgens de formule van v.

Amerikaans Roulette

Amerikaans Roulette is een gokspel dat gespeeld kan worden in verscheidene Nederlandse casino’s. Amerikaans Roulette wordt met maximaal tien spelers gespeeld, die elk hun eigen kleur speelfiches – ook chips geheten – kiezen. Er zijn 10 verschillende kleuren chips beschikbaar. De chips stellen een bepaald geldbedrag voor.

Aan een tafel wordt Amerikaans Roulette gespeeld. Er spelen al twee spelers A en B mee. A heeft rood en B heeft groen. Er zijn dus nog 8 kleuren beschikbaar. Drie nieuwe spelers kiezen één voor één een kleur om mee te kunnen spelen.

3p **18** ☐ Bereken op hoeveel manieren de drie nieuwe spelers een kleur kunnen kiezen.

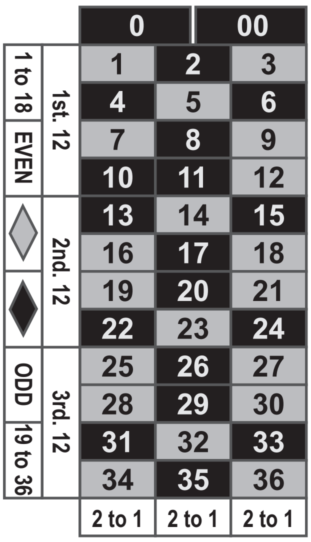
De persoon die het spel leidt, de croupier, werpt een balletje in een bak met een draaiende schijf met 38 vakjes met nummers. De nummers zijn: de 0, de 00 en de oneven en even nummers 1 tot en met 36. Voor alle duidelijkheid: 0 en 00 worden hier niet als even of oneven nummer gezien. Het nummer van het vakje waarin het balletje valt, is het winnende nummer.

In de meeste gevallen zal het winnende nummer even of oneven zijn, en niet 0 of 00. De kans op even, en ook op oneven, is per spel dus iets kleiner dan 0,5. Toch is bij bijvoorbeeld 10 spellen de kans dat in precies de helft van het aantal spellen het winnende nummer even is, niet zo groot.

3p **19** ☐ Bereken de kans dat in 10 spellen het winnende nummer precies vijf keer even is.

In figuur 5 is het speelveld afgebeeld van Amerikaans Roulette. Voordat de croupier het balletje werpt, zet elke speler één of meer chips in op één van de nummers 1 tot en met 36 of op een combinatie van een aantal nummers, bijvoorbeeld op alle even nummers. Een speler kan niet inzetten op de nummers 0 en 00. Als het winnende nummer een nummer is waarop de speler heeft ingezet, dan krijgt de speler zijn inzet terug én een uitbetaling door de croupier. Zo niet, dan gaat de inzet van de speler naar het casino.

figuur 5



Erik speelt in het casino Amerikaans Roulette. Zijn favoriete nummer is 12. Erik begint met tien chips en zet elke keer één chip in op nummer 12. Zodra het balletje op nummer 12 valt, stopt hij direct met spelen en gaat hij met winst naar huis; in het andere geval speelt hij tot zijn tien chips op zijn en gaat hij met verlies huiswaarts.

5p **20** ☐ Bereken de kans dat Erik met winst naar huis gaat.

Er zijn verschillende manieren om in te zetten.
Een daarvan is ‘straight up bet’: de speler legt een chip op één vakje met een nummer. Hij heeft dus de keus uit de vakjes 1 tot en met 36. Wanneer het winnende nummer gelijk is aan dat nummer, is de uitbetaling door de croupier gelijk aan 35 maal de inzet.
Een andere manier om in te zetten is ‘split bet’. In dat geval legt een speler een chip op twee vakjes tegelijk, bijvoorbeeld 10 en 11, of 23 en 26. Zie figuur 6. Wanneer het winnende nummer gelijk is aan een van deze nummers, is de uitbetaling door de croupier 17 maal de inzet.

figuur 6

Bij het casino vraagt men zich af of het voor de winst van het casino uitmaakt of een speler inzet op ‘straight up bet’ of op ‘split bet’. We kunnen dit onderzoeken door zowel bij ‘straight up bet’ als bij ‘split bet’ de winstverwachting voor het casino uit te rekenen wanneer een speler 1000 dollar inzet.

4p **21** □ Voer dit onderzoek uit.

Einde