

# Examen HAVO

# 2009

tijdvak 2  
woensdag 24 juni  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde A**

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Verf

---

Verf is een bijzondere stof. Wanneer je het aanbrengt, is het vloeibaar, na het drogen is het hard. Verf bestaat namelijk uit vaste stof die opgelost is in een vloeistof die tijdens het drogen verdampft.

We noemen het aantal vierkante meters dat met een liter verf geschilderd kan worden het **rendement**. Het rendement kun je berekenen met de formule:

$$R = \frac{10 \cdot V}{d}$$

Hierin is:

- $R$  het rendement (in m<sup>2</sup>/liter);
- $V$  het percentage vaste stof van de verf;
- $d$  de dikte van de verflaag (in micrometer<sup>1</sup>).

Op een blik verf staat vermeld dat het percentage vaste stof 67 is en dat het rendement 12 m<sup>2</sup>/liter is.

- 3p    **1** Bereken de dikte van de verflaag in micrometer waar de fabrikant blijkbaar van uitgegaan is.

Verf van topmerken is per liter duurder dan verf van huismerken van doe-het-zelfzaken. Maar verf van huismerken bevat meestal een kleiner percentage vaste stof dan verf van topmerken.

Om te weten welke verf het goedkoopste is, moet je dus niet kijken naar de prijs per liter, maar naar de prijs per vierkante meter aangebrachte verf.

Een huismerkverf kost 21 euro per liter en heeft een percentage vaste stof van 30. Verf van een topmerk kost 25 euro per liter en heeft een percentage vaste stof van 40.

We vergelijken van beide merken een verflaag van 50 micrometer dikte.

- 5p    **2** Onderzoek welke verf het goedkoopste is.

noot 1 1 micrometer = 0,001 millimeter

Voordat je met verven begint, wil je natuurlijk weten hoeveel (blikken) verf je nodig hebt. Omgekeerd kun je je ook afvragen hoeveel vierkante meter je kunt verven met één blik verf. Afhankelijk van het soort kwast dat wordt gebruikt, verlies je tussen de 5 en 10 procent van de verf.

Het verband tussen deze zaken staat in de volgende formule, waarin ook rekening is gehouden met verlies van verf door gebruik van de kwast:

$$H = \frac{10 \cdot A \cdot d}{V \cdot (100 - p)}$$

Hierin is:

- $H$  de hoeveelheid verf (in liter);
- $A$  de oppervlakte (in  $\text{m}^2$ );
- $d$  de dikte van de verflaag (in micrometer);
- $V$  het percentage vaste stof;
- $p$  het verliespercentage bij kwasten; dit varieert van 5 tot 10.

De verf die je wilt gebruiken, wordt verkocht in blikken van 2,5 liter. Op de blikken staat dat het percentage vaste stof 35 is.

Je wilt met een kwast een verflaag van 70 micrometer dikte aanbrengen.

4p **3** Bereken hoeveel vierkante meter je met zo'n blik verf maximaal kunt schilderen.

Iemand heeft 15 liter verf gekocht met een percentage vaste stof van 67. Hij gaat een verflaag van 60 micrometer dikte aanbrengen. Met deze gegevens ingevuld, luidt de formule dan:

$$15 = \frac{10 \cdot A \cdot 60}{67 \cdot (100 - p)}$$

In deze formule is te zien dat de oppervlakte  $A$  die hij met deze hoeveelheid kan verven nu alleen nog afhangt van het verliespercentage  $p$ . Het verband tussen  $A$  en  $p$  is lineair. Bovenstaande formule is dus te herschrijven tot een formule van de vorm  $A = a \cdot p + b$ .

4p **4** Bereken  $a$  en  $b$ .

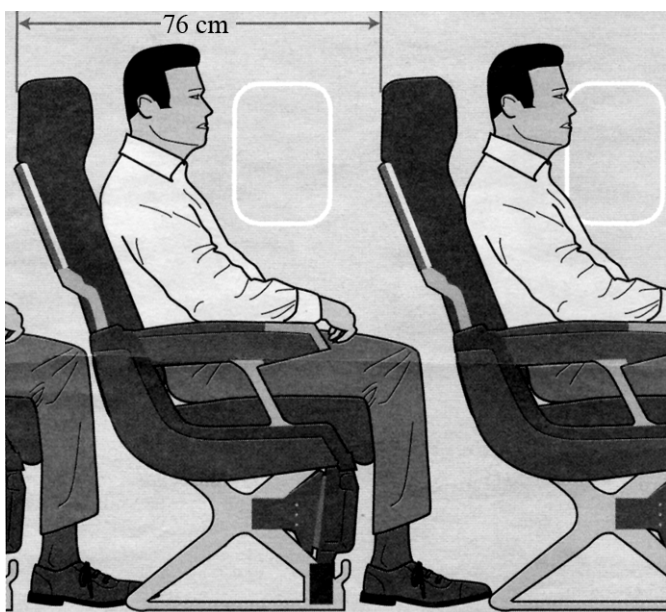
## Comfort Class

Een paar jaar geleden vochten vliegmaatschappijen een ware prijzenoorlog met elkaar uit. Om maar zo veel mogelijk passagiers te lokken, verlaagden zij de prijzen van de vliegtickets. Dit ging wel ten koste van de luxe: stoelen werden iets dichter op elkaar gezet zodat er meer passagiers in een vliegtuig konden, op sommige vluchten werd er geen drankje of maaltijd geserveerd, enzovoort.

Sommige maatschappijen beginnen langzamerhand weer meer service te verlenen tegen een iets hogere prijs.

Een voorbeeld daarvan is het aanbieden van meer ruimte tussen de stoelen. We geven de hoeveelheid ruimte aan met de afstand tussen twee opeenvolgende stoelleuningingen. In figuur 1 is dat 76 cm.

figuur 1



Bij het beantwoorden van de vragen nemen we het volgende aan:

- voor de eerste rij stoelen is net zo veel (been)ruimte als bij de overige rijen;
- de achterste rij stoelen staat tegen de achterwand;
- we houden geen rekening met nooduitgangen en dergelijke.

We nemen aan dat er voor alle stoelen een ticket is verkocht.

Een vliegmaatschappij heeft een vliegtuig met stoelen die 76 cm uit elkaar staan. Het is een Boeing 767-300ER met 41 rijen en 7 stoelen per rij.

De maatschappij overweegt voor langere vluchten, waar een ticket nu € 229 kost, de stoelen 8 cm verder uit elkaar te zetten. Die stoelen staan dan 84 cm uit elkaar, maar een ticket kost dan wel € 49 meer. Er zijn dan natuurlijk wel minder rijen in het toestel.

4p **5** Bereken hoeveel euro extra dit dan voor de vliegmaatschappij oplevert.

De vliegmaatschappij bekijkt ook een andere mogelijkheid: alleen de voorste 17 rijen worden vervangen door een aantal rijen met 84 cm ruimte en een aantal rijen met zelfs 113 cm ruimte. Zie figuur 2.

Van de stoelen met 113 cm ruimte komen er maar 6 op een rij te staan; bij de overige rijen blijven er 7 stoelen per rij.

De stoelen met 76 cm ruimte kosten € 229. De stoelen met 84 cm ruimte kosten € 49 meer. De stoelen met 113 cm ruimte zullen nog duurder moeten worden.

**figuur 2**

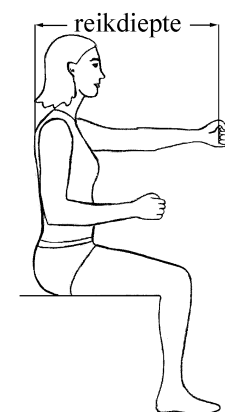
<b>Oude opstelling</b>	17 rijen met 7 stoelen	
	76 cm	
<b>Nieuwe opstelling</b>	4 rijen met 6 stoelen 113 cm	10 rijen met 7 stoelen 84 cm

De vliegmaatschappij wil weten welke ticketprijs ze moet vragen voor de stoelen met 113 cm ruimte, zodat de inkomsten bij de nieuwe opstelling minstens gelijk blijven ten opzichte van de oude opstelling. Zie figuur 2.

- 4p **6** Welke ticketprijs moet ze minstens vragen? Licht je antwoord toe.

Om gerieflijk te zitten heb je een ruimte nodig die minstens gelijk is aan de reikdiepte, zie figuur 3. Volgens een Belgisch onderzoek dat in 2005 uitgevoerd werd, is de reikdiepte van mensen tussen 18 en 65 jaar normaal verdeeld met een gemiddelde van 76,6 cm en een standaardafwijking van 5,0 cm.

**figuur 3**



- 4p **7** Bereken hoeveel procent van de mensen tussen 18 en 65 jaar door te weinig ruimte niet gerieflijk zit als de stoelen zo staan dat de reikdiepte 76 cm is.

Uit datzelfde Belgische onderzoek bleek dat de lichaamslengte van de 18- tot 65-jarigen normaal verdeeld is met een gemiddelde van 170,6 cm en een standaardafwijking van 9,4 cm.

Voor de 65- tot 80-jarigen is de lichaamslengte ook normaal verdeeld. De gemiddelde lichaamslengte is 161,1 cm. Verder is bekend dat zo'n 10% van de 65- tot 80-jarigen langer is dan de gemiddelde lengte van de 18- tot 65-jarigen.

- 4p **8** Bereken de standaardafwijking van de lichaamslengte van de 65- tot 80-jarigen in millimeters nauwkeurig.

## Geursorteerproef

Een geursorteerproef is een test die moet uitwijzen of de geur op een voorwerp afkomstig van een misdrijf gelijk is aan de lichaamsgeur van een verdachte. Uitgangspunt is dat justitie beschikt over het voorwerp waarmee een misdrijf is gepleegd en waarvan het vermoeden bestaat dat de geur van de verdachte eraan hangt.

De proef begint als volgt.

Een verdachte krijgt enkele minuten lang twee roestvrijstalen buisjes in handen zodat zijn lichaamsgeur erop achterblijft. Vijf figuranten en een controlepersoon doen hetzelfde.

Alle buisjes met lichaamsgeur worden in glazen potjes gestopt en gewaarmerkt met een letter. Vervolgens worden de veertien potjes in twee rijen opgesteld, waarbij in elke rij precies eenmaal een potje van iedere persoon voorkomt. In figuur 1 zie je een voorbeeld van zo'n opstelling.

**figuur 1**

A: controlepersoon	
B, C, D, E, F: figuranten	
X: verdachte	
rij 1	
7:	E
6:	F
5:	X
4:	D
3:	A
2:	B
1:	C
rij 2	
7:	B
6:	D
5:	A
4:	C
3:	E
2:	F
1:	X

- 3p **9** Bereken het aantal verschillende opstellingen (waarbij dus in elke rij precies eenmaal een potje van iedere persoon voorkomt).

De geursorteerproef vindt plaats met speciaal getrainde honden. Eerst ruikt de hond aan een voorwerp dat controlepersoon A in handen heeft gehad. Als de hond daarna in beide rijen potje A aanwijst, is de hond goedgekeurd. In alle andere gevallen wordt de hond afgekeurd.

- 4p **10** Toon aan dat een hond die uit iedere rij een willekeurig potje aanwijst (dus zonder te ruiken), een kans van ongeveer 0,98 heeft om afgekeurd te worden.

Als de hond is goedgekeurd, worden de twee potjes A weggehaald en kan de echte proef beginnen. De hond mag nu aan het voorwerp ruiken waarmee het misdrijf is gepleegd, waarna het dier de rijen met de overgebleven zes potjes mag besnuffelen. Als de hond in beide rijen het juiste potje aanwijst, geldt dit als bewijs dat de verdachte het misdrijf heeft gepleegd.

Bij het **willekeurig** aanwijzen van potjes is de kans dat de geursorteerproef geldt als bewijs dat de verdachte het misdrijf heeft gepleegd, gelukkig erg klein. De hond moet dan namelijk eerst de beide potjes A kiezen en daarna de beide potjes X.

4p 11 Bereken deze kans.

In de praktijk gebruikt men slechts 36 verschillende opstellingen om de potjes in twee rijen te zetten. Er zijn 10 van deze 36 opstellingen die ook gebruikt worden bij het trainen van de honden. Dat zijn de zogeheten trainingsopstellingen.

Bij het begin van een geursorteerproef kiest men willekeurig een van de 36 opstellingen. De kans op een trainingsopstelling is dan  $\frac{10}{36}$ .

Het vermoeden bestaat echter dat men, tegen de regels in, niet altijd willekeurig kiest. Aan de hand van een steekproef van 114 geursorteerproeven stelde een hoogleraar namelijk vast dat er opvallend vaak trainingsopstellingen voorkwamen.

2p 12 Bij hoeveel van de 114 geursorteerproeven mag je verwachten dat een van de trainingsopstellingen gebruikt wordt? Licht je antwoord toe.

In deze steekproef van 114 geursorteerproeven werden deze trainingsopstellingen 45 keer gebruikt. Dat is veel vaker dan je zou verwachten.

Neem aan dat je 114 keer willekeurig een van de 36 opstellingen mag kiezen.

4p 13 Bereken de kans dat de trainingsopstellingen 45 keer of vaker voorkomen.

## Sparen

Er wordt steeds meer gespaard via internet spaarrekeningen. Meestal is het rentepercentage hoger dan bij een gewone spaarrekening, omdat de bank lagere kosten heeft. Zo hoeft de bank niet bij iedere storting op de spaarrekening een afschrift van deze storting per post te versturen. Naast de hogere rente zijn er ook nog andere voordelen voor de spaarder. Zo kan men dagelijks online zien hoe groot het spaarsaldo<sup>1</sup> is. De banken publiceren dus elke dag het nieuwe spaarsaldo.



Bij een internet spaarrekening is er sprake van 2,75% rente op jaarbasis (365 dagen). Het spaarsaldo groeit dus exponentieel. Bij dit rentepercentage komt dat neer op een groefactor van 1,000074328 per dag.

3p **14** Toon aan dat de groefactor per dag inderdaad 1,000074328 is.

Op 31 maart stort iemand 12 500 euro op deze internet spaarrekening. Op 1 april is zijn spaarsaldo al toegenomen vanwege de rente die hij krijgt.

3p **15** Bereken zijn spaarsaldo in centen nauwkeurig op 22 april.

Er zijn nogal wat verschillende internet spaarrekeningen. In de rest van deze opgave bekijken we er twee: een gewone en een met opnamekosten. Deze laatste geeft wel een iets hogere rente, maar als je het spaarsaldo opneemt, betaal je een percentage van het opgenomen bedrag aan opnamekosten. Als je bijvoorbeeld 2500 euro van je rekening haalt en de bank rekent 1% opnamekosten, dan moet je 25 euro aan opnamekosten betalen. Je krijgt dus maar 2475 euro uitbetaald.

Je stort 10 000 euro op een gewone internet spaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van 1,85%. Je stort ook 10 000 euro op een internet spaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel 2,65% rente op jaarbasis geeft.

Na 6 jaar neem je van beide rekeningen het totale spaarsaldo op.

4p **16** Bereken bij elk van beide internet spaarrekeningen het bedrag dat je uiteindelijk in handen krijgt.

noot 1 spaarsaldo = het totale bedrag dat op de spaarrekening staat, inclusief de rente



We gaan nu uit van een gewone internetspaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van 2,0% en van een internetspaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel 3,0% rente op jaarbasis geeft. Op beide rekeningen storten we weer 10 000 euro en we nemen het gehele spaarsaldo op na  $t$  jaar. Het bedrag dat we dan 'in handen' krijgen kun je berekenen met de onderstaande formules:

$$B_g = 10000 \cdot 1,02^t$$

en

$$B_o = 9900 \cdot 1,03^t$$

Hierbij is  $B_g$  het bedrag dat men na  $t$  jaar in handen krijgt bij de gewone internetspaarrekening en  $B_o$  het bedrag dat men na  $t$  jaar in handen krijgt bij de internetspaarrekening met opnamekosten.

Je gevoel zegt je misschien dat er geen verschil is als je bij beide rekeningen het totale spaarsaldo na 1 jaar opneemt. Toch is dat wel zo.

Na iets meer dan een jaar sparen zijn de beide bedragen wel hetzelfde.

5p 17 Bereken hoeveel dagen langer dan een jaar je dan moet sparen.

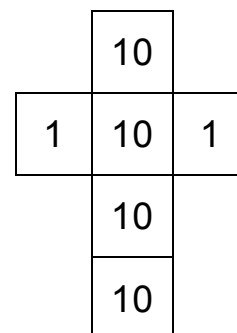
**Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.**

## Spelletje

In een casino in Brussel kun je een dobbelspel spelen.

Het gaat als volgt:

- je betaalt 30 euro om het spel een keer te spelen;
- je gebruikt een dobbelsteen met op twee van de zijden een 1 en op vier van de zijden een 10;
- je mag vier keer gooien met de dobbelsteen;
- jouw opbrengst is de som van de gegooiden getallen in euro's.



In een spel kan bijvoorbeeld het volgende gebeuren: je gooit een 10, een 10, een 1 en weer een 10. Je opbrengst is dan 31 euro en je winst dus 1 euro.

- 3p **18** Toon met een berekening aan dat de kans op een opbrengst van 31 euro gelijk is aan  $\frac{32}{81}$  of 0,3951.

In tabel 1 staan de mogelijke winsten van het spel. De bijbehorende kansen zijn voor een deel ook ingevuld.

**tabel 1**

<b>winst</b> (in euro)	10	1	–8	–17	–26
<b>kans</b>	...	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Omdat de kans op winst groter is dan de kans op verlies lijkt dit een aantrekkelijk dobbelspel. Maar ..., pas op! Het casino hoopt natuurlijk dat je dit spel vaak speelt. En daardoor verdient men dan goed aan je. Daarvoor moet je de verwachtingswaarde maar eens berekenen.

- 5p **19** Vul tabel 1 verder in en bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

Op een avond speelt Joran dit spel 50 keer, maar voor zijn gevoel verliest hij erg vaak grote bedragen.

- 4p **20** Bereken de kans dat een verlies van 17 euro in 50 spellen elf keer of meer voorkomt.

Anne heeft ooit iets eigenaardigs meegemaakt. Ze speelde op een avond het spel 36 keer. Tijdens deze avond had ze alleen maar opbrengsten van 22 en 40 euro en na afloop had ze een opbrengst van 1080 euro (dus geen winst of verlies).

Noem  $A$  het aantal keer dat haar opbrengst 40 euro is; dan kun je voor haar situatie de volgende vergelijking afleiden:

$$18 \cdot A + 792 = 1080$$

- 5p **21** Leid deze vergelijking af en bereken hiermee het aantal keer dat haar opbrengst 40 euro was.