Wiskunde A (oude stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **03**

Tijdvak 1
Dinsdag 27 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 12, 14 en 15 is een bijlage toegevoegd.

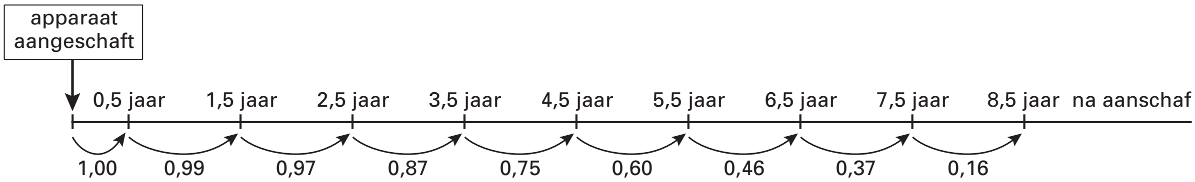
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Levensduur van koffiezetapparaten

Enkele jaren geleden is onderzocht hoe lang nieuw aangeschafte koffiezetapparaten meegaan. Op basis daarvan is een kansmodel gemaakt zoals weergegeven in figuur 1. Hierin is bijvoorbeeld te zien dat alle apparaten een half jaar na aanschaf nog in gebruik zijn. Ook is te zien dat voor een apparaat van 1,5 jaar oud de kans 0,97 is dat het een jaar later nog steeds in gebruik is, en dus de kans 0,03 is dat het in dat jaar wordt afgedankt.

figuur 1



We passen dit model toe op een groep van 1500 nieuwe koffiezetapparaten. De *levensduur* van een apparaat is de tijdsduur tussen het aanschaffen en het afdanken van het apparaat. Uit de gegevens in figuur 1 volgt dat 187 van deze 1500 koffiezetapparaten een levensduur hebben tussen 2,5 en 3,5 jaar.

4p **1** ☐ Laat met een berekening zien dat dit klopt.

Het bovengenoemde aantal 187 vind je terug in tabel 1. De andere aantallen in deze tabel zijn op overeenkomstige wijze berekend.

tabel 1 **Levensduur van 1500 koffiezetapparaten**

levensduur in jaren	aantal koffiezetapparaten
0,5-1,5	15
1,5-2,5	45
2,5-3,5	187
3,5-4,5	313
4,5-5,5	376
5,5-6,5	305
6,5-7,5	163
7,5-8,5	81
>8,5	15

7p **2** ☐ Verwerk de gegevens van tabel 1 op normaal waarschijnlijkheidspapier en toon daarmee aan dat de levensduur bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaarddeviatie van 1,6 jaar.

We nemen voor de rest van deze opgave aan dat de levensduur van koffiezetapparaten normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaarddeviatie van 1,6 jaar.

Iemand heeft 9 jaar geleden zijn eerste koffiezetapparaat gekocht en nu, 9 jaar later, is net zijn derde koffiezetapparaat kapot gegaan. Hij gaat naar de winkel en moppert tegen de verkoper dat dit toch wel heel uitzonderlijk is.

De klant redeneert als volgt: “Drie koffiezetapparaten in negen jaar, dat is drie jaar per apparaat. Je zou verwachten dat zo’n apparaat wel langer dan drie jaar meegaat. De kans dat dit drie keer achter elkaar niet het geval is, is wel heel erg klein.”

5p **3** ☐ Bereken de kans dat drie willekeurig gekozen koffiezetapparaten elk een levensduur van ten hoogste drie jaar hebben.

De verkoper zegt dat eigenlijk gekeken moet worden naar de totale levensduur van drie apparaten samen.
De totale levensduur van drie apparaten samen is normaal verdeeld. De kans dat deze totale levensduur ten hoogste 9 jaar is, is volgens de verkoper veel groter dan de door de klant bedoelde kans.

5p **4** ☐ Bereken de kans die de verkoper bedoelt.

We gaan nog even terug naar het onderzoek uit het begin van de opgave. Voor dit onderzoek heeft men *niet* een aantal koffiezetapparaten gedurende hun hele levensduur gevolgd. In plaats daarvan heeft men begin januari 1997 een enquête uitgevoerd onder 4000 huishoudens. Deze enquête heeft men precies een jaar later opnieuw uitgevoerd bij dezelfde 4000 huishoudens. Beide keren werd gevraagd of men een koffiezetapparaat gebruikte en zo ja, in welk kalenderjaar het was aangeschaft.
Op basis van de zo verkregen gegevens hebben de onderzoekers het model van figuur 1 opgesteld. Daarbij gingen ze ervan uit dat koffiezetapparaten uit verschillende jaren gelijkwaardig zijn wat de levensduur betreft. Bovendien gingen ze ervan uit dat de koffiezetapparaten uit elk kalenderjaar gelijkmatig gespreid over dat jaar zijn aangeschaft, en dus aan het eind van het jaar van aanschaf gemiddeld een half jaar oud zijn.

Begin januari 1997 gebruikten 506 van de onderzochte huishoudens een koffiezetapparaat dat in 1993 was aangeschaft. Begin januari 1998, een jaar later dus, bleek dat 125 van deze apparaten inmiddels waren afgedankt.

3p **5** ☐ Welke van de kansen uit figuur 1 kan uit deze gegevens worden afgeleid? Licht je antwoord toe met een berekening van de betreffende kans.

In de winkel worden ook espresso-apparaten van het merk Pressa verkocht. De fabrikant beweert dat de helft van de Pressa-apparaten 8 jaar na aanschaf nog steeds in gebruik is. Maar de verkoper krijgt nogal wat klachten over deze apparaten en is dan ook van mening dat ze minder lang mee gaan.
Op internet vindt hij de resultaten van een onderzoek naar de levensduur van Pressa-apparaten. Daaruit blijkt dat van de 50 onderzochte Pressa-apparaten er 31 een levensduur van minder dan 8 jaar hadden.

6p **6** ☐ Onderzoek of dit resultaat voldoende aanleiding is om de bewering van de fabrikant te verwerpen. Neem een significantieniveau van 5%.

Grondstofverbruik

Ongeveer dertig jaar geleden verscheen het ‘Rapport van de Club van Rome’. Daarin wordt aandacht besteed aan het wereldwijd verbruik van veel grondstoffen. De schrijvers vreesden dat verschillende grondstoffen snel op zouden raken. Bij hun berekeningen hebben zij het begin van het jaar 1970 als uitgangspunt genomen.
Het rapport vermeldt dat begin 1970 de voorraad koper 313 miljoen ton was en dat in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton bedroeg.

De *levensduur* van de voorraad van een grondstof is het aantal jaren vanaf begin 1970 totdat de voorraad van deze grondstof is uitgeput. Daarbij gaan we ervan uit dat er in de tussentijd geen nieuwe voorraden worden ontdekt. Zo is volgens het rapport de levensduur van de voorraad chroom 420 jaar, wanneer je aanneemt dat het jaarlijks verbruik van chroom steeds even groot is als in 1970, namelijk 1,9 miljoen ton.

Als we aannemen dat in de jaren na 1970 ook het jaarlijks verbruik van koper steeds even groot is als dat in 1970, dan is de levensduur van de voorraad chroom veel groter dan die van de voorraad koper.

3p **7** ☐ Hoeveel keer zo groot is dan de levensduur van de voorraad chroom, vergeleken met die van de voorraad koper? Licht je antwoord toe met een berekening.

In werkelijkheid was er ook destijds al sprake van een toenemende vraag naar grondstoffen. In het rapport heeft men hier aandacht aan besteed. Zo veronderstelde men dat vanaf 1970 het verbruik van koper jaarlijks zou groeien met 5,8% en het verbruik van chroom jaarlijks met 3,3%.

5p **8** ☐ Bereken in dat geval vanaf welk jaar het jaarverbruik van koper minstens 6 keer zo groot is als dat van chroom.

Wanneer het grondstofverbruik niet constant is maar jaarlijks groeit met een vast percentage, wordt de levensduur van de voorraad korter. Deze nieuwe levensduur geven we aan met L^*. Om L^* te berekenen gebruikt men de volgende formule:

$$L^* = \frac{230 \cdot \log(L \cdot p + 100) - 460}{p}$$

In deze formule is p het percentage waarmee het verbruik jaarlijks groeit en L de levensduur van de voorraad bij een constant jaarlijks verbruik.

3p **9** ☐ Bereken in welk jaar de voorraad chroom is uitgeput indien het verbruik vanaf 1970 jaarlijks met 3,3% groeit.

In het voorafgaande zijn we ervan uitgegaan dat er geen nieuwe voorraden ontdekt zouden worden. Dit gebeurt echter wel. We schatten dat er per jaar 20 miljoen ton koper ontdekt wordt.

Het totale verbruik van koper (in miljoenen tonnen) sinds 1 januari 1970 is te berekenen met de volgende formule:

$$\textit{Totale verbruik} = 150 \cdot (1{,}058)^t - 150$$

Hierbij is t de tijd in jaren vanaf 1 januari 1970.

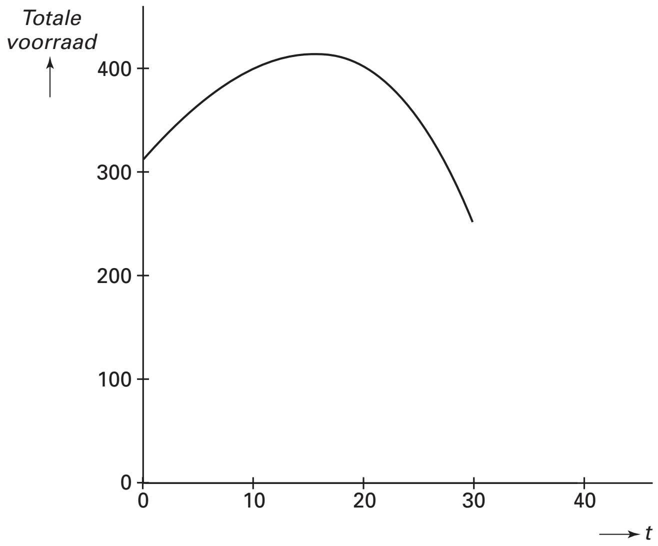
De totale voorraad koper (in miljoenen tonnen) is nu te berekenen met de formule:

$$\textit{Totale voorraad} = 463 + 20t - 150 \cdot (1{,}058)^t$$

5p **10** ☐ Toon aan dat deze laatste formule uit de voorgaande gegevens volgt.

In figuur 2 zie je een schets van de grafiek van de totale voorraad koper.

figuur 2

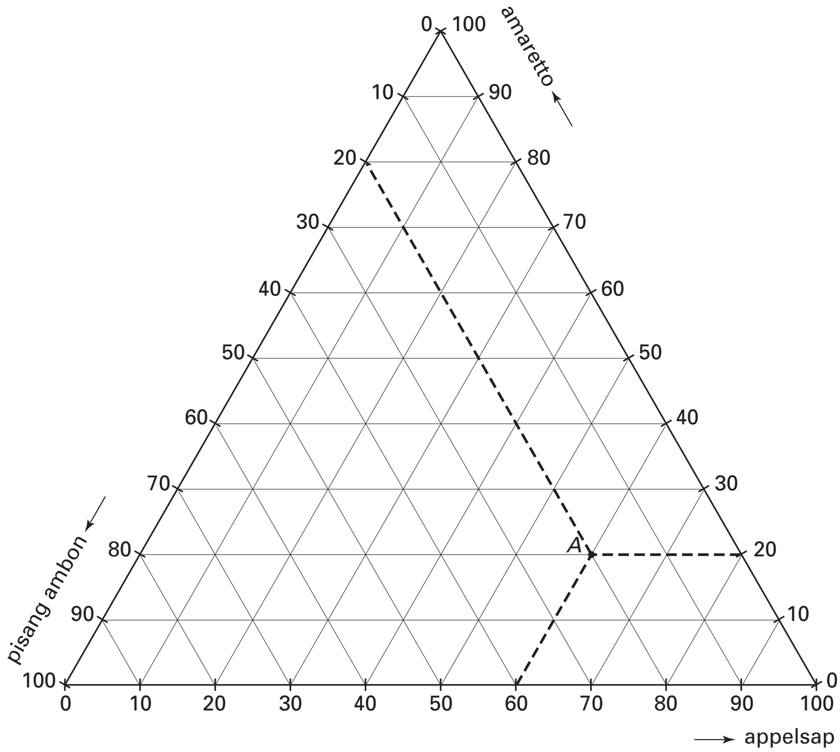


5p **11** ☐ Stel de afgeleide functie op en bereken daarmee bij welke waarde van *t* de totale voorraad koper maximaal is.

Cocktails

Een cocktail is een drank die wordt gemaakt door enkele basisdranken te mengen. Zo bestaat de cocktail 'Apple Dream' voor 60% uit appelsap, voor 20% uit amaretto en voor 20% uit pisang ambon.
Met deze drie basisdranken kunnen we veel meer cocktails maken door andere mengverhoudingen te gebruiken. Om al deze mengverhoudingen in kaart te brengen gebruikt men vaak een zogenaamd *drie-componentendiagram*. In figuur 3 zie je een afbeelding van zo'n drie-componentendiagram, met daarin het punt A. Dit punt hoort bij de cocktail 'Apple Dream'. Op de bijlage bij deze opgave staat het diagram ook afgebeeld.

figuur 3



De cocktail 'Strong Apple' bestaat voor 20% uit appelsap, voor 30% uit amaretto en voor 50% uit pisang ambon.

3p **12** ☐ Teken op de bijlage in figuur 3 het punt dat hoort bij 'Strong Apple'. Teken duidelijk de hulplijnen die je hebt gebruikt.

Een drankenfabrikant wil uit de drie genoemde basisdranken een cocktail maken. Om na te gaan welke winst hij kan behalen gebruikt hij de volgende gegevens.

basisdrank	**kosten per liter in euro's**
appelsap	0,25
amaretto	4
pisang ambon	3

De fabrikant wil de cocktail gaan verkopen voor 7,50 euro per liter.

We geven het percentage appelsap waaruit de cocktail bestaat aan met x, het percentage amaretto met y en het percentage pisang ambon met z.
De winst in euro's die de drankenfabrikant maakt op 1 liter cocktail noemen we W. Voor W geldt de volgende formule: $W = 4{,}5 + 0{,}0275x - 0{,}01y$.

4p **13** ☐ Laat zien hoe deze formule voor W uit de gegevens kan worden afgeleid. Bedenk daarbij dat $x + y + z = 100$.

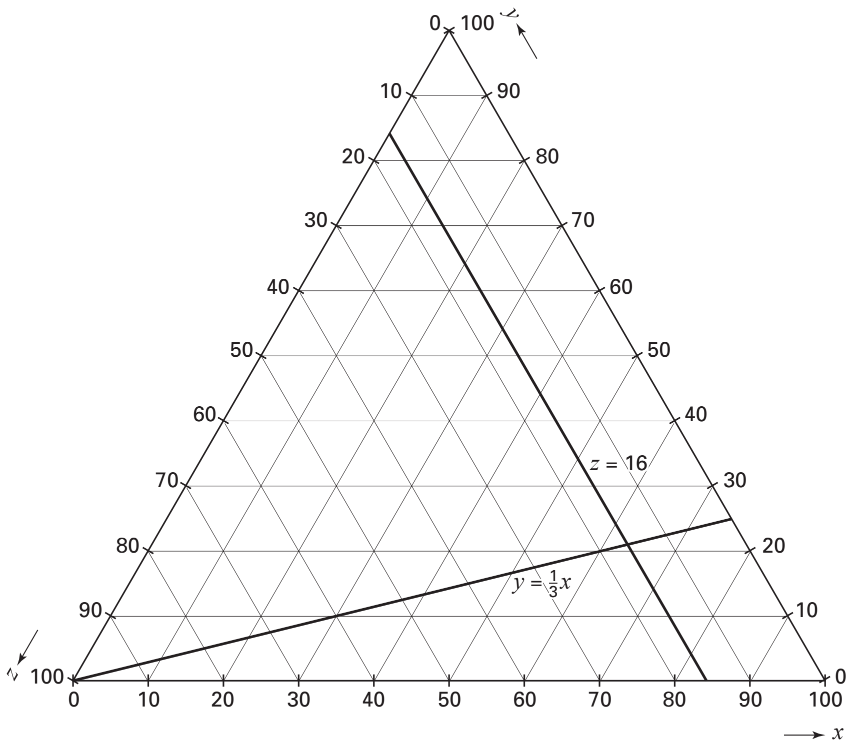
De drankenfabrikant stelt wel enkele voorwaarden aan de cocktail die hij wil maken:

- de cocktail moet voor minstens 16% uit pisang ambon bestaan;
- het percentage amaretto moet minstens even groot zijn als het percentage pisang ambon;
- het percentage appelsap mag hoogstens driemaal zo groot zijn als het percentage amaretto.

We kunnen deze drie voorwaarden als volgt vertalen: $z \geq 16$, $y \geq z$ en $y \geq \frac{1}{3}x$.

In figuur 4 hieronder zijn de twee grenslijnen $z = 16$ en $y = \frac{1}{3}x$ getekend. Figuur 4 staat ook op de bijlage.

figuur 4



4p **14** ☐ Teken op de bijlage in figuur 4 de ontbrekende grenslijn en geef het toegestane gebied aan.

De fabrikant wil weten bij welke mengverhouding van de basisdranken in de cocktail de winst per liter maximaal is en hoe groot deze winst is.

5p **15** ☐ Bereken deze mengverhouding en de winst per liter die de fabrikant bij deze mengverhouding behaalt.

Varkensstal

Wanneer een varkenshouder een nieuwe stal wil bouwen voor zijn varkens moet hij tegenwoordig aan strenge milieueisen voldoen voordat hij een bouwvergunning krijgt. Eén van die eisen heeft betrekking op de stank die wordt veroorzaakt door varkens.
De stank wordt bepaald met behulp van MVE's, de zogenoemde *mestvarkenseenheden*. Het aantal MVE's hangt af van de varkenssoort en wordt per varkenssoort berekend door het aantal varkens te delen door de bijbehorende MVE-factor. Het totaal aantal MVE's is de som van alle MVE's per varkenssoort.
In tabel 2 hieronder staan de gegevens van varkenshouder Jaarsma, die een aanvraag doet voor de bouw van een nieuwe varkensstal.

tabel 2 **Aanvraag varkenshouder Jaarsma**

aantal varkens	varkenssoort	MVE-factor
108	dragende/guste zeugen	4,2
36	kraamzeugen	2,3
488	gespeende biggen	22,0
10	opfokzeugen	1,4
1	dekberen	1,5
945	vleesvarkens	1,4

Uit de tabel kunnen we afleiden dat het totaal aantal MVE's van deze aanvraag na afronding gelijk is aan 746,36.

3p **16** ☐ Laat zien dat de waarde 746,36 klopt.

Het totaal aantal MVE's is uitgangspunt voor het al dan niet verlenen van een bouwvergunning. Daarbij wordt ook gekeken naar de directe omgeving van de varkensstal. In de 'Richtlijn Veehouderij en Stankhinder 1996' onderscheidt men vier categorieën. Categorie I betekent dat de stal gesitueerd is in de buurt van een bebouwde kom of gebouwen zoals een ziekenhuis. Er mag dan vrijwel geen stankhinder plaatsvinden, dus moet de afstand tussen de stal en de dichtstbijzijnde bebouwing erg groot zijn. Voor de categorieën II, III en IV is deze afstandseis steeds minder streng.

In tabel 3 zijn de formules gegeven die bij de categorieën I en II horen.

tabel 3 **Vereiste minimale afstand *D* tot dichtstbijzijnde bebouwing**

categorie	*M* (totaal aantal MVE's)	vereiste minimale afstand *D* in meters
I	$M \leq 150$	$D = 100$
	$150 < M \leq 1000$	$D = 9{,}157 \cdot M^{0{,}4804}$
	$M > 1000$	$D = 7{,}387 \cdot M^{0{,}5104}$
II	$M \leq 240$	$D = 100$
	$M > 240$	$D = 6{,}995 \cdot M^{0{,}489}$

Jaarsma heeft al een plaats voor de te bouwen stal op het oog. Bij het opstellen van de aanvraag in tabel 2 heeft hij de aantallen zo gekozen dat de afstand *D* precies voldoende is. Daarbij is hij ervan uitgegaan dat de stal in categorie II wordt ingedeeld. Maar de ambtenaar die de aanvraag behandelt, besluit dat de stal in categorie I valt. Jaarsma kan de plaats van de te bouwen stal niet meer veranderen. Hij zal zijn aanvraag moeten aanpassen, want de waarde van *M* die bij de aanvraag hoort, moet nu omlaag.

5p **17** ☐ Bereken hoe groot de maximale waarde van *M* nu mag zijn.

Bij categorie I bestaat de grafiek van *D* uit drie gedeelten. Het ligt voor de hand te veronderstellen dat het eerste en het tweede gedeelte op elkaar aansluiten en dat dit ook geldt voor het tweede en derde gedeelte.

5p **18** ☐ Onderzoek met enkele berekeningen of dit inderdaad het geval is.

Ook voor de categorieën III en IV gelden soortgelijke formules. Voor $M > 1000$ zien die formules er als volgt uit:

III: $D = 7{,}556 \cdot M^{0{,}4189}$

IV: $D = 3{,}013 \cdot M^{0{,}4863}$

Een ambtenaar die veel met deze formules voor $M > 1000$ werkt, vraagt zich af of de afstandseis van categorie III wel altijd strenger is dan de afstandseis van categorie IV.

4p **19** ☐ Voor welke waarden van M is de afstandseis van categorie III minder streng dan de afstandseis van categorie IV, uitgaande van de twee bovenstaande formules? Licht je antwoord toe met een berekening.

Voor de volgende vraag beperken we ons tot categorie IV. Voor categorie IV geldt, behalve bovenstaande formule, dat voor $M \leq 500$ de vereiste minimale afstand D gelijk is aan 50. Voor $500 < M \leq 1000$ is er een soortgelijke formule op te stellen als voor $M > 1000$. Hierbij gaan we ervan uit dat de grafiek van D die hoort bij categorie IV op dubbellogaritmisch papier bestaat uit enkele stukken van rechte lijnen die op elkaar aansluiten.

6p **20** ☐ Stel die formule voor $500 < M \leq 1000$ op en laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Einde