Wiskunde A (oude stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 03

Tijdvak 2
Woensdag 18 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 17 en 19 is een bijlage toegevoegd.

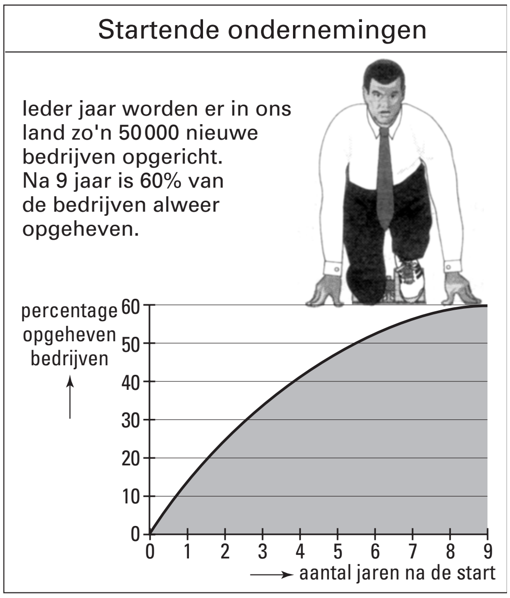
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Startende ondernemingen

In Nederland starten elk jaar ongeveer 50 000 bedrijven. Sommige van deze startende bedrijven verdwijnen weer snel, andere overleven langere tijd. De Kamers van Koophandel houden de gegevens hierover nauwkeurig bij. Op basis hiervan is in figuur 1 weergegeven hoeveel procent van deze bedrijven na een aantal jaren verdwenen is.

figuur 1



We maken een wiskundig model. In dit model gaan we ervan uit dat elk bedrijf elk jaar dezelfde vaste overlevingskans heeft. Uit figuur 1 kun je afleiden dat een startend bedrijf 40% kans heeft om de eerste 9 jaar te overleven. Op grond hiervan kan de jaarlijkse vaste overlevingskans van startende bedrijven worden berekend.

4p **1** ☐ Bereken deze jaarlijkse overlevingskans in vier decimalen nauwkeurig.

In de volgende twee vragen gaan we uit van een jaarlijkse overlevingskans van 0,9.

4p **2** ☐ Bereken de kans dat een startend bedrijf na 4 jaar nog bestaat en onderzoek of deze uitkomst in overeenstemming is met de gegevens van figuur 1.

Bij een steekproef worden uit de landelijke gegevens van de Kamers van Koophandel willekeurig 50 startende bedrijven geselecteerd.

4p **3** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat van de 50 startende bedrijven na 1 jaar minstens 45 bedrijven nog bestaan.

Gemeente A heeft door goede begeleiding van startende bedrijven weten te bereiken dat de jaarlijkse overlevingskans voor die bedrijven in deze gemeente op 0,95 uitkomt. Het beleid is erop gericht dat in deze gemeente jaarlijks 144 bedrijven starten. Een ambtenaar heeft namelijk berekend dat er dan ‘een heel grote kans’ is dat na 5 jaar ten minste 100 van deze bedrijven nog bestaan.

5p **4** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoe groot die kans is.

Volgens figuur 1 is de kans 0,60 dat een startend bedrijf in Nederland binnen 9 jaar al weer is opgeheven. Ondanks het feit dat Nederland en België in economisch opzicht als gevolg van Europese regelgeving steeds meer op elkaar zijn gaan lijken, bestaat het vermoeden dat deze kans in België groter is dan 0,60. Om dit vermoeden te onderzoeken, neemt men uit de verzamelde Belgische gegevens een aselecte steekproef van 925 startende bedrijven. Daarvan blijken er 581 binnen 9 jaar te zijn opgeheven.

7p **5** ☐ Onderzoek of dit resultaat het vermoeden bevestigt dat in België de kans dat een startend bedrijf binnen 9 jaar is opgeheven, groter is dan 0,60. Gebruik een significantieniveau van 0,05.

Koken

Drie studenten, Ger (G), Harm (H) en Kees (K), spreken af regelmatig voor elkaar te koken. In de keuken van hun studentenhuis hangt onderstaande intekenlijst voor een periode van twee weken.

Datum		5/3	6/3	7/3	8/3	9/3	10/3	11/3	12/3	13/3	14/3	15/3	16/3	17/3	18/3
Wie kookt?		*G*	*G*	*H*	*G*	*K*	*K*	*G*	*H*	*H*	*G*	*K*	*K*	*H*	*H*
Wie eet mee?	Ger	×	×	×		×	×	×		×	×	×			×
	Harm		×	×	×		×	×	×	×			×	×	×
	Kees	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×		

Op deze lijst is bijvoorbeeld af te lezen dat op 11 maart Ger kookte voor drie personen. Het komt soms voor dat iemand wel zorgt dat er een maaltijd klaarstaat, maar zelf niet mee-eet.

Na afloop van deze periode maken ze met bovenstaande lijst een overzicht wie hoe vaak voor wie gekookt heeft. Het resultaat is de matrix M.

$$\begin{array}{ll} & \quad\text{kok} \\ & \quad G \quad H \quad K \\ \text{kookt voor} \begin{array}{r} \text{Ger} \\ \text{Harm} \\ \text{Kees} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

In de intekenlijst kun je zien dat de verdeling van de kookbeurten tussen Ger, Harm en Kees 5-5-4 was. Stel nu, dat je *niet* de intekenlijst zou hebben, maar alleen de matrix M en de informatie dat deze matrix betrekking heeft op de kookbeurten gedurende deze 14 dagen.

4p **6** □ Geef alle andere mogelijkheden op grond van de matrix M voor de verdeling van de kookbeurten tussen Ger, Harm en Kees.

De drie studenten storten elke maand een vast bedrag in de huishoudpot, ongeacht het aantal keer dat ze mee-eten. Wie kookt, moet zelf de boodschappen betalen, maar krijgt uit de huishoudpot een vaste vergoeding van 3,50 euro per persoon die mee-eet, dus maximaal 10,50 euro per keer dat hij kookt. De werkelijke kosten blijken nogal te verschillen per kok. Ger geeft gemiddeld slechts 1,50 euro per persoon per maaltijd uit. Harm probeert altijd iets bijzonders op tafel te zetten. Dat kost hem gemiddeld 3,00 euro per persoon. En als Kees kookt, geeft hij gemiddeld 2,50 euro per persoon uit.

Alle drie maken ze dus wat winst als ze koken.

3p **7** □ Bereken de totale winst die Ger in de hierboven beschreven periode maakt door te koken.

Kees vraagt zich af of uit de matrix M met behulp van matrixvermenigvuldiging berekend kan worden hoeveel winst ieder van de drie maakt. Hij stelt de 3×3-matrix B op door

achtereenvolgens $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M$ en $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A$ te berekenen.

Hij is niet tevreden met het resultaat omdat B veel overbodige informatie bevat.

6p **8** □ Bereken B en beredeneer welke matrixelementen van B *niet* overbodig zijn.

Later komt hij op het idee, niet de matrix $\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ maar de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ te gebruiken.

Door matrices te vermenigvuldigen krijgt hij nu, uitgaande van matrix M, als uitkomst een matrix die uitsluitend de drie gezochte getallen bevat.

4p **9** □ Hoe kan hij dit gedaan hebben? Licht je antwoord toe met een berekening.

Hoogte van werkplaatsen

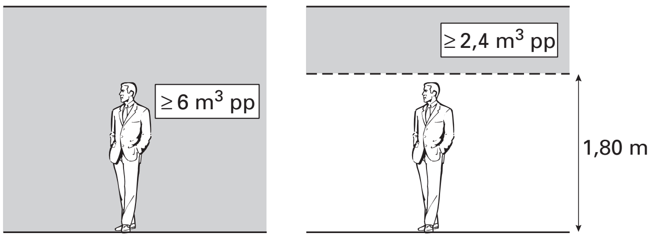
De Arbeidsomstandighedenwet schrijft voor dat bij het bouwen en inrichten van werkplaatsen rekening wordt gehouden met de gezondheid, de veiligheid en het welzijn van de mensen die er werken. Het ‘Handboek Ergonomie’ geeft op basis daarvan richtlijnen voor de hoogte van werkplaatsen.

Een belangrijk criterium is de hoeveelheid vrije luchtruimte per persoon: dat is de ruimte die per persoon beschikbaar is, buiten de ruimte die de personen zelf innemen.
Het Handboek Ergonomie noemt twee voorwaarden. Voorwaarde A geeft aan hoeveel vrije luchtruimte er ten minste per persoon moet zijn, voorwaarde B zegt hoeveel daarvan zich boven een hoogte van 1,80 m moet bevinden. Zie tabel 1. De twee voorwaarden voor werkplaatsen met maximaal 9 personen worden in figuur 2 nog een keer toegelicht.

tabel 1

	werkplaats voor maximaal 9 personen	werkplaats voor meer dan 9 personen
A. minimale vrije luchtruimte	6 m^3 per persoon	7 m^3 per persoon
B. minimale vrije luchtruimte boven 1,80 m	2,4 m^3 per persoon	2,8 m^3 per persoon

figuur 2



We nemen aan dat een persoon zelf 0,5 m^3 aan ruimte inneemt en niet langer is dan 1,80 m.

Van een bepaalde werkplaats is het vloeroppervlak 40 m^2 en de hoogte 2,50 m. Er werken 9 mensen.

3p **10** ☐ Laat met een berekening zien dat deze werkplaats iets minder dan 11 m^3 vrije luchtruimte per persoon bevat, waarvan ruim 3 m^3 boven 1,80 m.

Een architect ontwerpt een werkplaats. De hoogte van de werkplaats is 3 m. Omdat nog niet vaststaat voor hoeveel personen de werkplaats bestemd is, berekent hij voor verschillende aantallen personen hoe groot het vloeroppervlak volgens tabel 1 ten minste moet zijn.
Hij berekent steeds eerst bij welk vloeroppervlak aan voorwaarde A is voldaan. Het valt hem op dat dan telkens ook aan voorwaarde B is voldaan. Dit blijkt voor elk aantal personen te gelden. We gaan dit alleen na voor meer dan 9 personen.

5p **11** ☐ Toon met een berekening aan dat voor alle werkplaatsen met een hoogte van 3 m die bestemd zijn voor meer dan 9 personen, geldt: als aan voorwaarde A voldaan is, dan is ook aan voorwaarde B voldaan.

Volgens tabel 1 zou een werkplaats lager mogen zijn naarmate het vloeroppervlak groter is. Om te voorkomen dat een ruimte te laag wordt, geeft het Handboek ook nog voorwaarden voor de hoogte. Zo moet een werkplaats met een vloeroppervlak van 200 m^2 een hoogte van ten minste 2,70 m hebben.

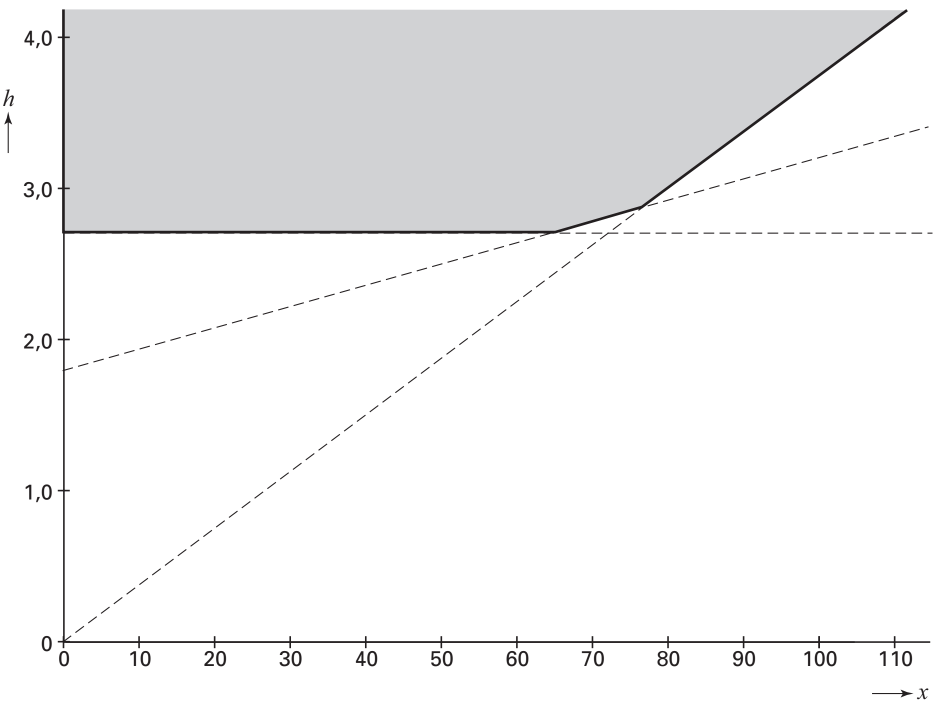
In de rest van deze opgave kijken we naar een werkplaats met een vloeroppervlak van 200 m^2. We noemen de hoogte van zo'n werkplaats h (in meters).
Uit de voorwaarden in tabel 1 volgt dat h afhangt van het aantal personen x waarvoor de werkplaats bestemd is.
Volgens bovengenoemde voorwaarde uit het Handboek is $h \geq 2{,}70$. Bij meer dan 9 personen kunnen we de voorwaarden nu weergeven in de volgende drie formules:

$h \geq 0{,}0375x$ $\qquad$ $h \geq 0{,}014x + 1{,}80$ $\qquad$ en $\qquad$ $h \geq 2{,}70$

4p **12** ☐ Laat zien hoe de formule $h \geq 0{,}014x + 1{,}80$ volgt uit voorwaarde B in tabel 1.

In figuur 3 is voor elke waarde van x aangegeven hoe groot h mag zijn. Het toegestane gebied is grijs aangegeven. Omdat x een aantal personen voorstelt, hebben alleen gehele waarden van x betekenis.

figuur 3



In figuur 3 kun je zien dat voor kleine waarden van x de voorwaarde $h \geq 2{,}70$ de strengste voorwaarde is: als daaraan is voldaan, is zeker aan de andere twee voorwaarden voldaan.
Het komt ook voor dat voorwaarde B uit tabel 1 de strengste voorwaarde is.

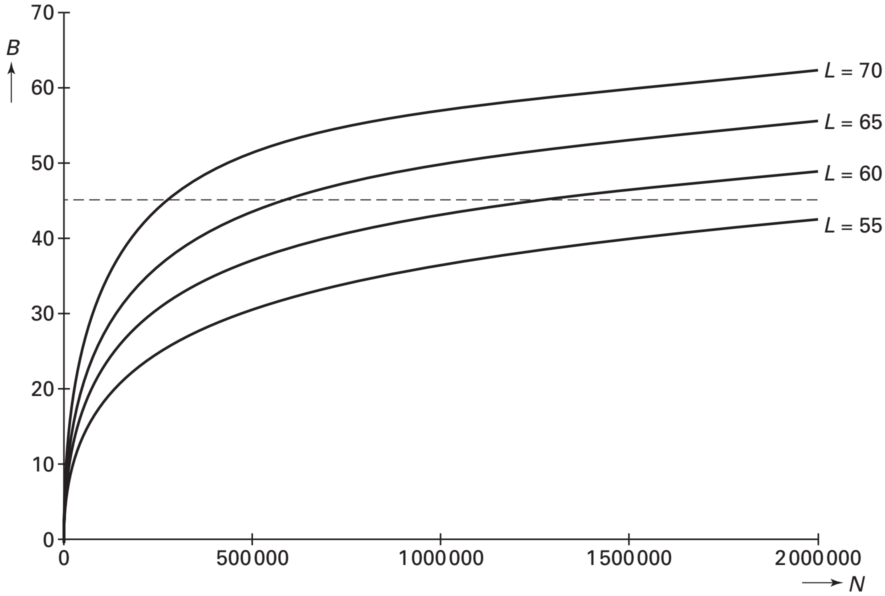
6p **13** ☐ Onderzoek bij welke aantallen personen dat het geval is.

Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt.

De geluidsbelasting B op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen dat per jaar passeert en van het geluidsniveau van elk vliegtuig. In deze opgave nemen we aan dat er geen onderlinge verschillen tussen vliegtuigen zijn wat het geluidsniveau betreft. Het geluidsniveau per vliegtuig geven we aan met L. Door nieuwe technieken is het mogelijk dit geluidsniveau per vliegtuig steeds verder omlaag te brengen. Het aantal vliegtuigen per jaar noemen we N. Voor enkele waarden van L is het verband tussen N en B weergegeven in figuur 4.

figuur 4



Zoals gezegd is in milieuwetten vastgelegd hoe groot de geluidsbelasting in de buurt van vliegvelden maximaal mag zijn: $B_{max} = 45$.
De waarde van L is bepalend voor het maximaal toegestane aantal vliegtuigen, N_{max}. In figuur 4 lees je af dat voor $L = 70$ bij benadering geldt: $N_{max} = 270\,000$.
Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af, zodat N_{max} toeneemt.

3p **14** ☐ Toon aan dat uit figuur 4 blijkt dat een verlaging van het geluidsniveau van vliegtuigen met 5 niet steeds leidt tot eenzelfde toename van N_{max}.

De formule die het verband tussen L, N en B geeft is:

(1) $B = 20 \cdot \log N + \frac{4}{3} L - 157$

Voor L, het geluidsniveau per vliegtuig, geldt op zeker moment: $L = 72$.
Vanzelfsprekend zal een toename van het aantal vliegtuigen ook de geluidsbelasting doen toenemen. Met behulp van de afgeleide $\frac{dB}{dN}$ kun je onderzoeken in welke mate dat het geval is. Men wil weten bij welke waarde van N een toename van 10 000 vliegtuigen de geluidsbelasting met 1 zal doen toenemen.

6p **15** ☐ Stel een formule op voor $\frac{dB}{dN}$ en gebruik $\frac{dB}{dN}$ om deze waarde van N te berekenen.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Sindsdien wordt de geluidsbelasting met een andere formule berekend:

(2) $B = 10 \cdot \log N + L - 79$

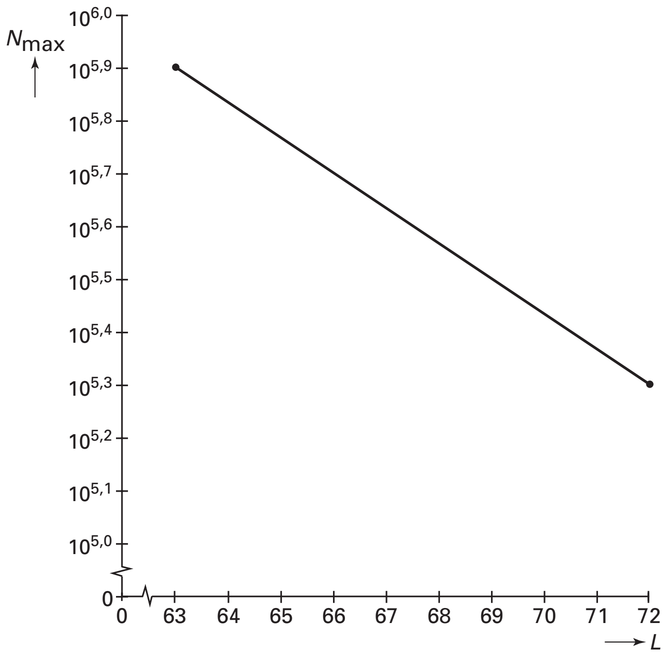
Nog steeds geldt dat de maximale geluidsbelasting, ongeacht de gehanteerde formule, 45 is. Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen kan nu geschreven worden als:

$$N_{\max} = 2{,}512 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}794^{L}$$

6p **16** ☐ Laat zien hoe dit volgt uit formule (2) en $B_{\max} = 45$.

In 2001 gold $L = 69$. Formule (2) is zó bepaald dat de oude en de nieuwe formule in 2001 dezelfde geluidsbelasting gaven rond het vliegveld. Desondanks veroorzaakte deze nieuwe formule veel discussie. We vergelijken de oude en de nieuwe situatie met elkaar. In figuur 5 is voor de oude formule (1) het verband tussen L en $N_{\max}$ getekend op enkellogaritmisch papier. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 5



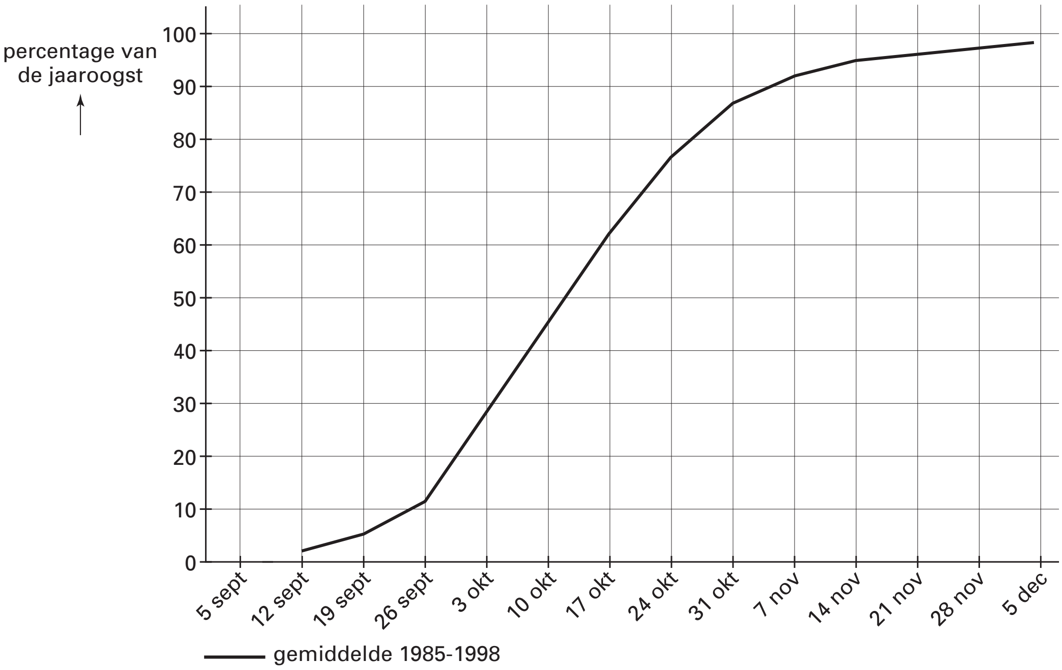
5p **17** ☐ Schets op de bijlage ook voor de nieuwe formule (2) het verband tussen L en $N_{\max}$ en geef een argument waarom milieugroepen, met betrekking tot het lawaai, kritiek hebben op de nieuwe formule. Gebruik je figuur om je argument te onderbouwen.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Sojabonen

In de Verenigde Staten worden op grote schaal sojabonen geteeld. Vanaf begin september worden de sojabonen geoogst. Voor de jaren 1985 tot en met 1998 heeft men berekend hoeveel procent van de jaaroogst aan het eind van elke week was geoogst. Het gemiddelde van deze 14 jaren is weergegeven in figuur 6. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 6

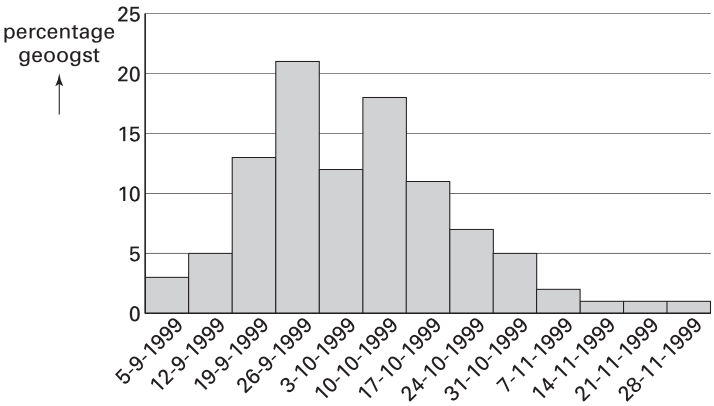


Tijdens een aantal weken werd gemiddeld per dag meer dan 1% van de jaaroogst geoogst.

4p **18** ☐ Onderzoek aan de hand van de grafiek in figuur 6 welke weken dat zijn.

Voor het jaar 1999 heeft men per week het in die week binnengehaalde percentage van de jaaroogst berekend. De gegevens staan in figuur 7.

figuur 7



Van het histogram in figuur 7 kan ook een grafiek gemaakt worden zoals in figuur 6.

4p **19** ☐ Teken in de figuur op de bijlage de grafiek die hoort bij de gegevens in figuur 7 en ga aan de hand daarvan na of er in 1999 sprake was van een vroege oogst of een late oogst. Beargumenteer je keuze.

Het percentage sojabonen dat op een bepaalde datum is geoogst, verschilt van jaar tot jaar. Deze percentages zijn voor elke datum normaal verdeeld. De grafiek in figuur 6 geeft dan ook een gemiddelde weer over 14 jaar. Op 10 oktober is gemiddeld 45% van de sojabonen geoogst, met een standaarddeviatie van 15%.

3p **20** ☐ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat op 10 oktober minder dan 20% zal zijn geoogst.

Einde