

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 10 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Kentekens

Elk land geeft kentekens uit voor personenauto's. Op een kenteken staat een code die bestaat uit een combinatie van cijfers en/of letters. In Nederland gebruikt men al sinds de jaren vijftig een systeem met drie groepjes van elk twee letters of twee cijfers. Men begon toen met: 2 letters – 2 cijfers – 2 cijfers (bijvoorbeeld: FK – 17 – 34). In tabel 1 staat een overzicht van het verdere verloop. Ga ervan uit dat elke periode uit tabel 1 op 1 januari begint.

tabel 1

periode	kentekenserie	voorbeeld	aantal gebruikte kentekens	totaal aantal gebruikte kentekens
..... – 1964	2 letters – 2 cijfers – 2 cijfers	FK – 17 – 34	2 000 000	2 000 000
1965 – 1972	2 cijfers – 2 cijfers – 2 letters	54 – 23 – GD	3 000 000	5 000 000
1973 – 1977	2 cijfers – 2 letters – 2 cijfers	78 – PH – 12	3 000 000	8 000 000
1978 – 1990	2 letters – 2 cijfers – 2 letters	ZR – 95 – DD	5 000 000	13 000 000
1991 – 1998	2 letters – 2 letters – 2 cijfers	KM – MN – 05	5 000 000	18 000 000
1999 –?	2 cijfers – 2 letters – 2 letters	19 – JP – PL	5 000 000	23 000 000

Niet alle 26 letters van het alfabet worden gebruikt voor de kentekens van personenauto's: sommige letters worden bijvoorbeeld gebruikt voor vrachtauto's of motoren. De cijfers worden wel alle tien (0 tot en met 9) gebruikt. Uiteindelijk zijn er in de periode tot en met 1964 voor personenauto's ongeveer 2 miljoen kentekens van de vorm 2 letters – 2 cijfers – 2 cijfers gebruikt. Dat is veel minder dan het aantal kentekens dat gebruikt had kunnen worden als men voor personenauto's wel alle 26 letters en alle 10 cijfers had kunnen gebruiken.

4p **1** Bereken hoeveel minder dat is.

Je kunt je afvragen of het *totaal* aantal gebruikte kentekens in Nederland gedurende de periode 1965-1998 exponentieel groeide.

4p **2** Toon aan dat het totaal aantal gebruikte kentekens vanaf 1965 tot en met 1998 *niet* exponentieel is gegroeid.

Neem aan dat het totaal aantal gebruikte kentekens voor personenauto's vanaf 1978 wel exponentieel groeide.

3p **3** Bereken voor de periode vanaf 1978 de groeifactor per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

Als de kentekenserie waarmee in 1999 begonnen wordt uitgeput geraakt is, zal overgestapt moeten worden op een nieuwe serie kentekens. Neem het volgende aan:

- de nieuwe serie kentekens is van de vorm 2 letters – 2 letters – 2 letters;
- 10% van alle mogelijke kentekens van deze serie zal gebruikt worden voor personenauto's;
- het totaal aantal gebruikte kentekens voor personenauto's groeit exponentieel vanaf 1999 met een groeifactor van 1,04 per jaar.

6p **4** In welk jaar zal ook de serie 2 letters – 2 letters – 2 letters voor personenauto's uitgeput raken? Licht je antwoord toe.

Vruchtwisseling

Vruchtwisseling is een begrip uit de landbouw. Vruchtwisseling houdt in dat op een stuk grond nooit twee achtereenvolgende jaren hetzelfde gewas verbouwd wordt. De grond ligt ook regelmatig braak, dat wil zeggen dat er niets wordt verbouwd. Vruchtwisseling vindt onder andere plaats om te voorkomen dat landbouwgrond door een te eenzijdig gebruik uitgeput raakt.

In deze opgave bekijken we een eenvoudig model voor vruchtwisseling, waarbij we uitgaan van één stuk grond van een boer. Deze boer heeft voor dit stuk grond elk jaar drie mogelijkheden: aardappels verbouwen, groente verbouwen of braak laten liggen.

Hij gaat als volgt te werk:

- als hij aardappels heeft verbouwd dan laat hij het daaropvolgende jaar altijd de grond braak liggen;
- nadat de grond een jaar braak heeft gelegen, verbouwt de boer altijd groente op de grond;
- na de groente laat hij de grond een jaar braak liggen óf hij verbouwt aardappels; beide mogelijkheden hebben daarbij evenveel kans.

De drie mogelijkheden met de bijbehorende overgangskansen kunnen met behulp van een graaf worden weergegeven.

3p **5** Teken zo'n graaf.

Neem aan dat hij in 1999 de grond braak liet liggen.

5p **6** Toon aan dat er een kans is van $\frac{1}{2}$ dat in 2005 groente verbouwd wordt.

Bij het beschreven model kan ook een overgangsmatrix P voor de jaarlijkse overgangskansen worden opgesteld.

De zevende macht van P is hieronder deels gegeven.

$$\begin{array}{l} \text{over 7 jaar} \\ \text{aardappels} \\ \text{braak} \\ \text{groente} \end{array} \begin{array}{c} \text{dit jaar} \\ \begin{array}{ccc} a & b & g \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ * & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \\ * & * & * \end{array} \right] \end{array} \end{array} = P^7$$

4p **7** Geef de ontbrekende elementen van P^7 . Licht je antwoord toe.

De veertiende macht van P is hieronder gegeven. De elementen van P zijn afgerond op drie decimalen.

$$\begin{array}{l} \text{over 14 jaar} \\ \text{aardappels} \\ \text{braak} \\ \text{groente} \end{array} \begin{array}{c} \text{dit jaar} \\ \begin{array}{ccc} a & b & g \\ \left[\begin{array}{ccc} 0,203 & 0,195 & 0,203 \\ 0,406 & 0,398 & 0,398 \\ 0,391 & 0,406 & 0,398 \end{array} \right] \end{array} \end{array} = P^{14}$$

Neem aan dat de boer vanaf 1995 op deze manier te werk is gegaan en ook in de toekomst zo zal blijven handelen. We bekijken nu de periode van 2010 tot 2030.

4p **8** Gedurende hoeveel van deze 20 jaar zal de grond naar verwachting braak liggen? Licht je antwoord toe.

Verf

Normale houtverf bestaat voor ongeveer de helft uit oplosmiddel (terpentine). Wanneer de verf droogt, verdampt dit oplosmiddel. Daardoor is zulke verf schadelijk voor het milieu. De laatste jaren is high-solidverf in opkomst. High-solidverf bevat veel minder oplosmiddel en is daardoor minder schadelijk voor het milieu.

De stichting WERK heeft als werkgelegenheidsproject voor jongeren een verffabriekje opgezet. Er wordt normale verf en high-solidverf geproduceerd.

High-solidverf wordt verkocht in blikken met het opschrift: inhoud 750 ml verf. De vulmachine staat afgesteld op een gemiddelde van 760 ml en heeft een standaarddeviatie van 4,5 ml. Neem aan dat de inhoud normaal verdeeld is.

Een verfwinkel bestelt bij WERK 150 liter high-solidverf (1 liter = 1000 ml).

- 4p 9 Bereken hoeveel blikken in de bestelling naar verwachting minder dan 750 ml zullen bevatten.

De twee verfsoorten bestaan uit oplosmiddel en bindmiddel (zie tabel 2), en verder uit een kleine hoeveelheid kleurstoffen en hulpstoffen.

tabel 2

benodigd	per liter normale verf	per liter high-solidverf
oplosmiddel	0,5 liter	0,25 liter
bindmiddel	0,5 kg	0,75 kg

Er wordt uitsluitend gebruik gemaakt van grondstoffen die door een sponsor gratis ter beschikking worden gesteld. Afgesproken is dat de sponsor wekelijks maximaal 400 liter oplosmiddel en maximaal 600 kg bindmiddel levert, en voldoende kleurstoffen en hulpstoffen.

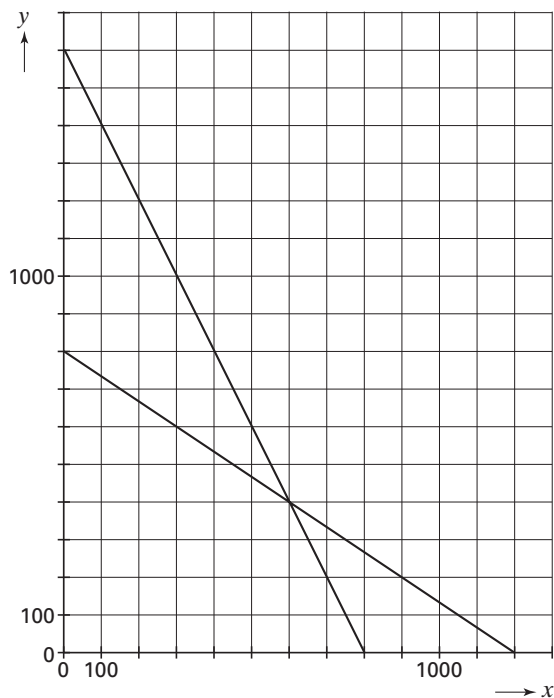
Met de beschikbare apparatuur kan per week ten hoogste 500 liter high-solidverf worden gemaakt. Voor normale verf heeft de apparatuur ruimschoots voldoende capaciteit.

In het kader van een milieuplan heeft men afgesproken dat ten minste 25% van de totale hoeveelheid geproduceerde verf high-solidverf zal zijn.

Stel dat er wekelijks x liter normale verf en y liter high-solidverf geproduceerd worden. Met behulp van bovenstaande informatie kunnen de grenslijnen van het toegestane gebied worden gevonden.

In figuur 1 zijn al enkele grenslijnen van het toegestane gebied getekend. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



- 5p **10** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het toegestane gebied. Licht je werkwijze toe.

De normale verf wordt verkocht voor 6 euro per liter, de high-solidverf voor 8 euro per liter.

- 6p **11** Onderzoek hoeveel van elke soort verf er wekelijks geproduceerd moet worden om een zo groot mogelijke opbrengst te behalen.

De opbrengst gaat naar de stichting WERK, maar daar staat tegenover dat deze stichting ook de productiekosten betaalt.

Onderzoek heeft uitgewezen dat de winst W (in euro per week) als volgt afhangt van x en y :

$$W = 0,003x^2 - 0,2x + 0,005y^2 - y - 800$$

Men spreekt af nog een stap verder te gaan dan het milieuplan: elke week zal precies *evenveel high-solidverf als normale verf* geproduceerd worden.

Met deze afspraak, *en alle eerder genoemde voorwaarden*, is het mogelijk dat er verlies wordt gemaakt. Het is dan echter ook mogelijk dat er winst wordt gemaakt.

- 5p **12** Bereken hoe groot het verlies per week maximaal is.

- 4p **13** Bereken eveneens de maximaal mogelijke winst per week.

Master Mind

Master Mind is een denkspel voor 2 spelers: een speler (codemaker) maakt een geheime kleurencode. De andere speler (codebreker) probeert door raden en combineren achter die kleurencode te komen in zo weinig mogelijk beurten. Het spel kan in verschillende varianten worden gespeeld. Deze opgave gaat over één van die varianten.

De kleurencode bestaat uit 4 posities. De codemaker kiest voor elk van die vier posities een kleur. De codemaker moet daarbij kiezen uit de 7 kleuren rood, geel, groen, blauw, oranje, zwart en wit. Elke kleur mag maximaal één keer in de geheime code voorkomen. Voor de kleuren zullen we achtereenvolgens de volgende afkortingen gebruiken: ro, ge, gr, bl, or, zw en wi. Een voorbeeld van een code is [ro, bl, or, ge]. Bij deze code is de eerste positie rood, de tweede blauw, de derde oranje en de vierde geel.

Bij elke beurt doet de codebreker een poging om de geheime code te raden; de codemaker geeft bij elke beurt het resultaat, dat wil zeggen:

hoeveel kleuren staan op de juiste positie en

hoeveel kleuren komen wel in de code voor, maar staan niet op de juiste positie.

Een voorbeeld:

De geheime code is [ro, or, zw, bl]. De codebreker raadt [bl, or, zw, wi]. De codemaker geeft dan als resultaat: 2 kleuren staan op de juiste positie, 1 kleur komt wel in de code voor maar staat niet op de juiste positie. We geven dit resultaat verkort weer met [2, 1]. In de volgende beurt raadt de codebreker [or, zw, zw, wi]. Het resultaat is nu: [1, 1]. Merk op dat het bij het raden is toegestaan om een kleur meer dan één keer te gebruiken.

2p **14** □ Waarom is het niet mogelijk om [3, 1] als resultaat te krijgen?

Het is mogelijk dat de codebreker de eerste beurten gebruikt om te bepalen uit welke vier kleuren de geheime code bestaat. Door steeds per beurt maar één kleur te nemen, kan eenvoudig worden nagegaan of deze kleur wel of niet in de code is opgenomen. Zo kan in de eerste beurt bijvoorbeeld [ro, ro, ro, ro] worden geraden, in de tweede beurt [or, or, or, or], vervolgens [ge, ge, ge, ge], enzovoort.

Petra heeft op deze manier de eerste beurten gebruikt om te bepalen uit welke vier kleuren de geheime code bestaat. Ze gebruikt in haar volgende beurt alleen deze vier kleuren.

3p **15** □ Bereken de kans dat het resultaat van haar volgende beurt [4, 0] is.

In de rest van de opgave gaan we ervan uit dat Petra altijd op de hiervoor beschreven manier het spel begint om de vier kleuren van de geheime code te bepalen. Zij heeft minimaal drie en maximaal zes beurten nodig om te bepalen uit welke vier kleuren de geheime code bestaat.

Het is mogelijk dat zij precies vier beurten nodig heeft om te bepalen uit welke vier kleuren de geheime code bestaat terwijl het resultaat van de vierde beurt [0, 0] is.

3p **16** □ Leg uit hoe dat kan.

Je kunt de kansverdeling berekenen van het aantal beurten dat nodig is voor het bepalen van de vier kleuren van de geheime code. Deze kansverdeling staat gedeeltelijk in tabel 3.

tabel 3

aantal beurten	3	4	5	6
kans	$\frac{1}{35}$			$\frac{20}{35}$

7p **17** □ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal beurten dat nodig is voor het bepalen van de vier kleuren van de geheime code.

Tanken

De onderstaande tekst is afkomstig uit een artikel uit een landelijk dagblad van augustus 1997.

artikel

.....De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is 5 gulden per liter en die in Duitsland is 2 gulden per liter. Dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van 150 gulden. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 20 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 750 kilometer rijden, dat is 375 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Den Helder nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten vertrekken om de grens te halen en met een half lege thuis zou komen.....

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van ‘tanken in het buitenland’ bekijken we in de vragen 18 en 19 een vereenvoudigd voorbeeld:

Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Jan woont op 200 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 km rijdt. Als hij tankt, tankt hij altijd precies 50 liter.

Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen.

Jan redeneert op de manier van het artikel: “mijn voordeel is 3 gulden per liter; zelfs als ik daar de kosten van het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel”.

- 4p 18 Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken volgens deze redenering 70 gulden bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen *per gebruikskilometer*. Een *gebruikskilometer* is elke afgelegde kilometer die *niet* gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

- 5p 19 Hoe groot is het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland voor Jan? Licht je antwoord toe met een berekening.

We bekijken nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noemen we N (in gulden per liter), de benzineprijs in het buitenland noemen we B (in gulden per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noemen we x (in km). Voor het voordeel bij tanken in het buitenland V (in gulden) per gebruikskilometer geldt dan:

$$V = 0,08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312,5 - x}$$

Hierbij gaan we ervan uit dat:

- auto's 1 op 12,5 rijden: elke auto rijdt 12,5 km op 1 liter benzine;
- een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 50 liter tankt;
- een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken.

- 5p 20 Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 15 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.

- 4p 21 Toon dat aan.

Einde