Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 03

Tijdvak 2
Woensdag 18 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1 en 3 is een bijlage toegevoegd.

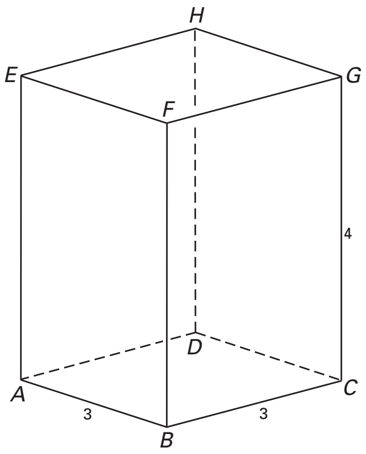
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

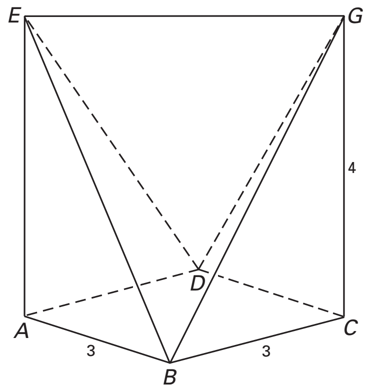
Lichaam met zeven vlakken

In figuur 1 is een balk *ABCD.EFGH* getekend. Het grondvlak *ABCD* is een vierkant met een zijde van 3 cm. De ribbe *CG* is 4 cm lang.
Door uit de balk de twee piramides *B.EFG* en *D.EHG* weg te halen, ontstaat het in figuur 2 getekende lichaam *ABCD.EG*.

figuur 1



figuur 2



Op de bijlage is een begin van de uitslag van dit lichaam *ABCD.EG* getekend.

4p **1** ☐ Maak de tekening van de uitslag af.

De hoek die het vlak *BEG* met het grondvlak *ABCD* maakt is α.

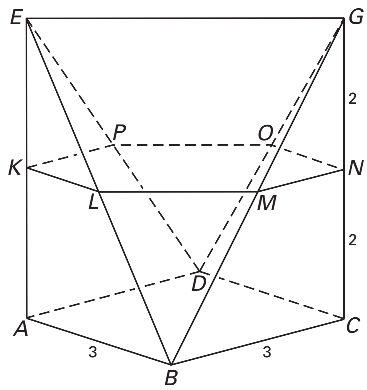
5p **2** ☐ Bereken α in gehele graden nauwkeurig.

Het lichaam wordt op halve hoogte evenwijdig aan het grondvlak doorsneden. In figuur 3 is deze horizontale doorsnede *KLMNOP* getekend.

Op de bijlage is het bovenaanzicht van het lichaam getekend.

4p **3** ☐ Teken in dit bovenaanzicht deze doorsnede. Zet de letters *K*, *L*, *M*, *N*, *O* en *P* erbij.

figuur 3



Door het lichaam op steeds grotere hoogten evenwijdig aan het grondvlak te doorsnijden, ontstaan horizontale doorsneden waarvan de oppervlaktes steeds meer van de oppervlakte van het vierkant *ABCD* afwijken.

5p **4** ☐ Bereken op welke hoogte (gerekend vanaf het grondvlak *ABCD*) de oppervlakte van de horizontale doorsnede gelijk is aan 5 cm^2.

Vierkant

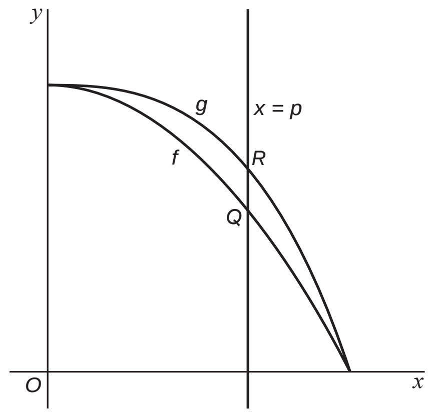
Op het interval [0, 1] is gegeven de functie $f(x) = 1 - x^2$.

De grafiek van f snijdt de lijn $y = x$ in een punt T.

3p **5** ☐ Bereken de coördinaten van T. Rond deze coördinaten af op drie decimalen.

Op het interval [0, 1] is ook gegeven de functie $g(x) = 1 - x^3$. Een verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafieken van f en g in twee punten Q en R. Zie figuur 4.

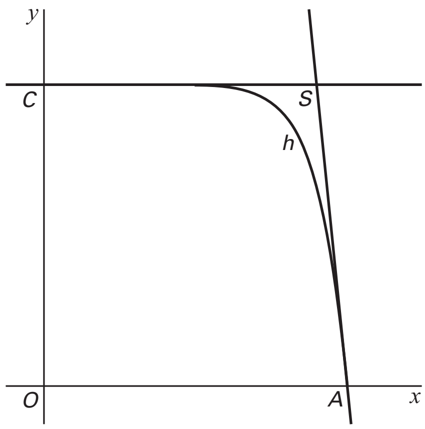
figuur 4



6p **6** ☐ Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van p, met $0 < p < 1$, de lengte van QR maximaal is.

Op het interval [0, 1] is de functie h gegeven door $h(x) = 1 - x^{10}$.
De grafiek van h snijdt de x-as in $A(1, 0)$ en de y-as in $C(0, 1)$.
De raaklijn aan de grafiek van h in het punt A snijdt de lijn $y = 1$ in het punt S. Zie figuur 5.

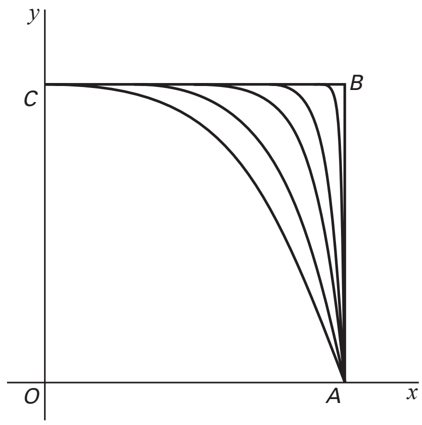
figuur 5



4p **7** ☐ Bereken de coördinaten van S.

Op het interval [0, 1] is de familie van functies $k(x) = 1 - x^n$ gegeven. Hierin is n een positief geheel getal. De functies f, g en h behoren tot deze familie.
Hoe groter de waarde van n is, hoe meer de grafiek van k, aangevuld met de lijnstukken OA en OC, lijkt op een vierkant $OABC$.
In figuur 6 zijn voor enkele waarden van n de grafieken van k met het vierkant $OABC$ getekend.

figuur 6



Voor elke waarde van n snijdt de raaklijn in het punt A aan de grafiek van k de lijn $y = 1$ in een punt S. Hoe groter n is, hoe kleiner de afstand SB is.

5p **8** ☐ Bereken voor welke waarden van n de afstand SB kleiner is dan 0,001.

Voor elke waarde van n snijdt de grafiek van k het lijnstuk OB in een punt T. Hoe groter n is, hoe dichter T bij punt B ligt.

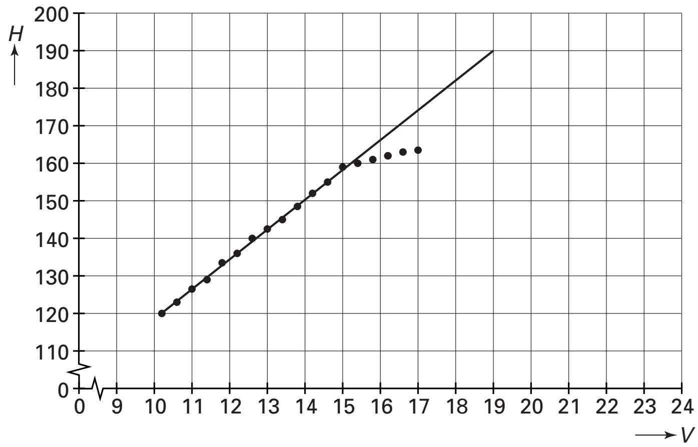
5p **9** ☐ Onderzoek voor welke waarden van n de x-coördinaat van T minder dan 0,1 verschilt van de x-coördinaat van B.

Hartfrequentie

Een schaatser doet een hardlooptest op een loopband. Na elke 300 meter die de schaatser heeft afgelegd op de loopband wordt er overgeschakeld op een hogere snelheid. De eerste 300 meter loopt hij met een constante snelheid van 10,2 km per uur. Na elke 300 meter wordt deze snelheid met 0,4 km per uur verhoogd. Een hartslagmeter registreert na elke 300 meter de hartfrequentie van de schaatser. De hartfrequentie van een mens is het aantal slagen dat het hart per minuut maakt.

In figuur 7 zijn de resultaten van de hardlooptest weergegeven. Hierin is te zien dat de eerste meetgegevens vrijwel op een rechte lijn liggen.

figuur 7

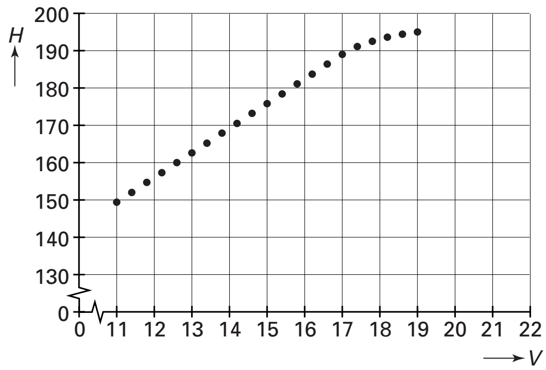


H is de hartfrequentie in slagen per minuut en V is de snelheid in km per uur.
Voor snelheden tussen 10 en 15 km per uur is het verband tussen V en H bijna lineair.

4p **10** ☐ Geef een formule van dit lineaire verband. Licht je werkwijze toe.

Een hardloper doet dezelfde test op de loopband. In figuur 8 zijn de resultaten weergegeven.

figuur 8



De hartfrequentie waarbij het lineaire verband verloren gaat, heet het omslagpunt. Voor de hardloper van figuur 8 ligt het omslagpunt bij een hartfrequentie van ongeveer 190 slagen per minuut. Bij een grotere inspanning is het hart minder goed in staat om voldoende slagen te maken.

Het verband tussen V en H wordt voor de hardloper bij benadering gegeven door de volgende twee formules:

$$H = 76{,}8 + 6{,}6\,V \qquad \text{voor } 11 \le V \le 17$$
$$H = 200 - (0{,}0545\,V - 0{,}836)^{-1} \qquad \text{voor } V \ge 17$$

De grafiek van het verband tussen V en H bestaat voor de hardloper uit twee delen die in het omslagpunt op elkaar aansluiten: beide formules geven bij $V = 17$ bij benadering dezelfde waarde voor H.

5p **11** ☐ Onderzoek met behulp van differentiëren of de beide formules bij $V = 17$ ook ongeveer dezelfde helling geven.

Ieder mens heeft zijn eigen maximale hartfrequentie.
Voor volwassenen geldt de volgende vuistregel: $H_{max} = 220 - 0{,}9\,L$.
Hierin is H_{max} de maximale hartfrequentie en L de leeftijd in jaren met $L \ge 20$.

De maximale snelheid die de hardloper op de loopband nog net 300 meter lang kan volhouden, is 20 km per uur. Bij deze maximale snelheid bereikt hij ook de maximale hartfrequentie.

4p **12** ☐ Onderzoek wat de leeftijd van deze hardloper is volgens de gegeven formules en de vuistregel.

Een logaritmische functie

Gegeven is de functie $f(x) = 2\ln(x + 1) + \ln(2 - 2x)$.

3p **13** ☐ Bereken het domein van f.

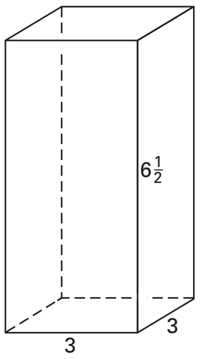
De grafiek van f heeft een top.

4p **14** ☐ Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van de x-coördinaat van deze top.

Compactheid

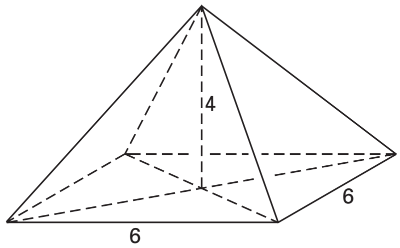
figuur 9

gebouw A



figuur 10

gebouw B



In de figuren 9 en 10 zijn schematische voorstellingen van twee gebouwen A en B getekend.
Gebouw A heeft de vorm van een balk van 3 bij 3 bij $6\frac{1}{2}$; de oppervlakte van gebouw A (zijvlakken, grondvlak en bovenvlak) is 96 en de inhoud 58,5.
Gebouw B heeft de vorm van een piramide met de top midden boven het grondvlak; het grondvlak is 6 bij 6 en de hoogte is 4.

5p **15** ☐ Laat met een berekening zien dat gebouw B dezelfde oppervlakte (inclusief grondvlak) heeft als gebouw A, maar dat de inhoud van beide gebouwen verschilt.

Gebouw A is compacter gebouwd dan gebouw B: de verhouding tussen de inhoud en de oppervlakte van de buitenkant is bij gebouw A groter dan bij gebouw B. Bij gebouw A is deze verhouding $\frac{I}{O} = \frac{58,5}{96} \approx 0,609$; bij gebouw B is de uitkomst kleiner.

Voor de compactheid van een gebouw vergelijkt men de oppervlakte (inclusief grondvlak) van de buitenkant van het gebouw met de oppervlakte van een bol met dezelfde inhoud.
In de bouw wordt de compactheid van een gebouw via de volgende vier stappen berekend:

I *Van het gebouw worden de oppervlakte en de inhoud berekend.*
II *Van de bol die dezelfde inhoud heeft als het gebouw, wordt de straal berekend.*
III *Van deze bol wordt de oppervlakte berekend.*
IV *De compactheid C wordt tenslotte berekend met de formule*

$$C = \frac{\text{oppervlakte bol}}{\text{oppervlakte gebouw}}$$

Een bol met straal r heeft inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$ en oppervlakte $4\pi r^2$.

5p **16** ☐ Laat met een berekening via deze vier stappen zien dat voor gebouw A geldt $C \approx 0,759$.

De compactheid C kan ook direct uitgedrukt worden in de inhoud I en de oppervlakte O van het gebouw. Bij benadering geldt de formule

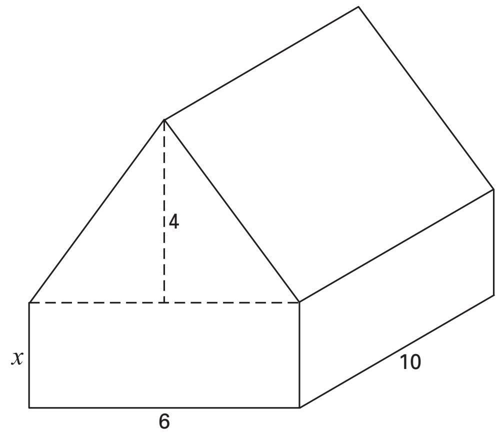
$$C = \frac{4,84 \cdot I^{\frac{2}{3}}}{O}$$

Hierin is I de inhoud en O de oppervlakte van het gebouw.

5p **17** ☐ Toon met behulp van de formule $C = \frac{4,84 \cdot I^{\frac{2}{3}}}{O}$ aan dat de compactheid van een kubus met ribbe k bij benadering gelijk is aan 0,81 voor *elke* positieve waarde van k.

In figuur 11 is een huis getekend. Het heeft de vorm van een recht prisma.
Het huis is 6 meter breed en 10 meter lang.
De hoogte van de zolderverdieping is 4 meter. De nok ligt midden boven het grondvlak. De hoogte van de benedenverdieping is gelijk aan x meter.
De compactheid van dit huis hangt af van de waarde van x.
De oppervlakte (in m^2) van dit huis is $184 + 32x$.
Ook de inhoud (in m^3) van dit huis kan uitgedrukt worden in x.

figuur 11



7p **18** ☐ Bereken met behulp van de formule $C = \dfrac{4{,}84 \cdot I^{\frac{2}{3}}}{O}$ de maximale compactheid van het gebouw en de waarde van x waarvoor deze bereikt wordt. Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Einde