Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 01

Tijdvak 2
Woensdag 20 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 15 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 6 en 11 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

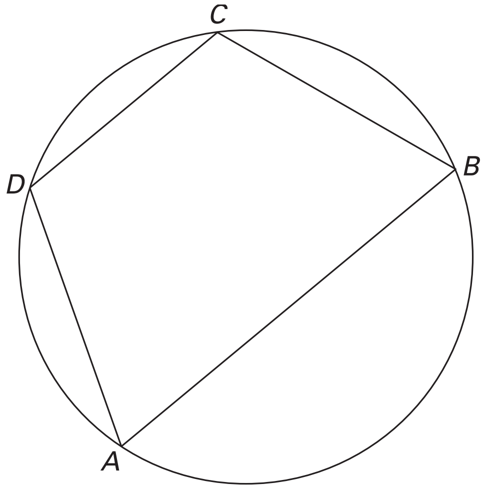
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Koordentrapezium

In figuur 1 is koordenvierhoek $ABCD$ getekend. AB is evenwijdig aan DC; $ABCD$ is dus een trapezium. De figuur is ook op de bijlage getekend.

figuur 1

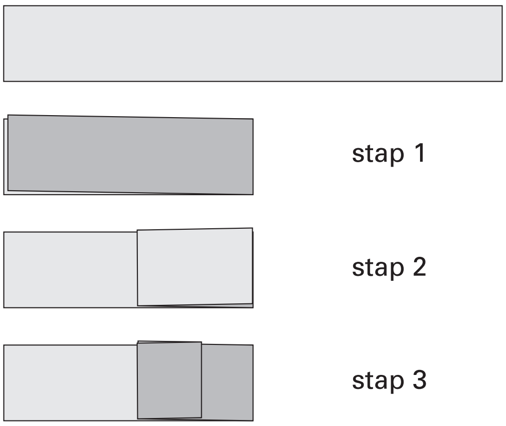


5p **1** □ Bewijs de volgende stelling:
Als een koordenvierhoek een trapezium is, heeft hij twee overstaande zijden die even lang zijn.

Vouwen

Van een strook papier van 14 cm lengte zit de rechterrand los en is de linkerrand vastgeplakt op de ondergrond. De strook wordt linksom dubbelgevouwen (stap 1 in figuur 2); hierbij verdeelt de vouwlijn de strook in twee gelijke delen. Het bovenste deel wordt rechtsom dubbelgevouwen (stap 2 in figuur 2). Daarna wordt het bovenste deel hiervan weer linksom dubbelgevouwen (stap 3 in figuur 2). Dit proces kan in theorie eindeloos herhaald worden. We willen de limiet van de plaats van de losse rand weten.

figuur 2



De plaats van de losse rand na n keer vouwen noemen we u_n.
De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is gegeven door:

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_1 = 0 \\ u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}) \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{cases}$$

In figuur 3 en op de bijlage zijn op een getallenlijn de startwaarden 14 en 0 aangegeven.

figuur 3

4p **2** □ Geef op de getallenlijn op de bijlage de plaats aan van u_3 en u_4. Licht je werkwijze toe.

De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is convergent. Om de plaats op de getallenlijn van $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ te berekenen, bekijken we de verschilrij $v_k = u_k - u_{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

5p **3** □ Bewijs dat voor $k = 2, 3, 4, \ldots$ geldt: $v_k = -\frac{1}{2} v_{k-1}$

De termen van de rij u_n zijn te vinden met behulp van de rij v_k:

$u_1 = u_0 + v_1$
$u_2 = u_0 + v_1 + v_2$
$u_3 = u_0 + v_1 + v_2 + v_3$
$\vdots$
$u_n = u_0 + v_1 + \ldots + v_n$

7p **4** □ Toon aan dat voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ geldt: $u_n = 14 + 9\frac{1}{3}((-\frac{1}{2})^n - 1)$.

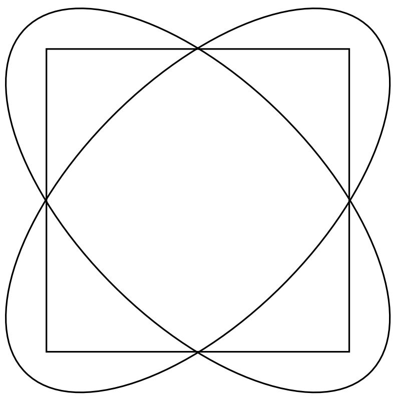
4p **5** □ Bereken exact de limiet van de plaats van de losse rand.

Vierkant met twee ellipsen

Van twee congruente ellipsen liggen de brandpunten op de hoeken van een vierkant. Zie figuur 4. Deze figuur staat ook op de bijlage. De ellipsen snijden elkaar in de middens van de zijden van het vierkant.
In elk van de snijpunten van de ellipsen is de hoek tussen de raaklijnen even groot.

7p **6** □ Bereken deze hoek in graden nauwkeurig.

figuur 4



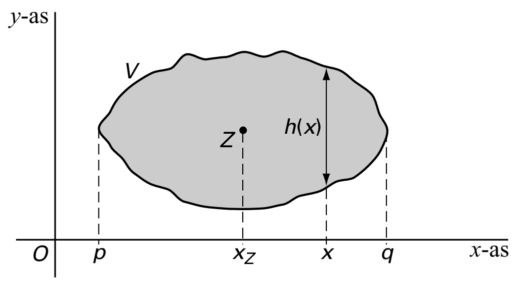
Zwaartepunt

De coördinaten van het zwaartepunt van een vlakdeel kun je met de formule in het kader hieronder berekenen.

Van vlakdeel V is Z het zwaartepunt.
De coördinaten van Z zijn x_Z en y_Z.
Er geldt:

$$x_Z = \frac{1}{\text{oppervlakte van } V} \cdot \int_p^q x \cdot h(x)\,\mathrm{d}x$$

Hierbij is $h(x)$ de bij x behorende hoogte van V, voor $p \le x \le q$.
De berekening van y_Z verloopt op een soortgelijke manier.

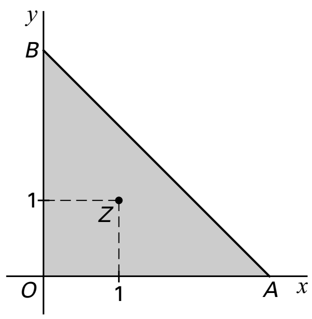


De vlakdelen in deze opgave zijn symmetrisch in de lijn $y = x$. Dus geldt $y_Z = x_Z$.

De hoekpunten van driehoek OAB zijn $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ en $B(0, 3)$. Zie figuur 5.

6p **7** □ Toon met de formule in het kader aan dat het zwaartepunt van driehoek OAB het punt $(1, 1)$ is.

figuur 5

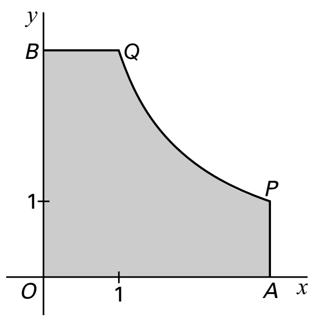


Het vlakdeel $OAPQB$ in figuur 6 wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de hyperbool

$$y = \frac{3}{x}.$$

8p **8** □ Bereken exact de x-coördinaat van het zwaartepunt van dit vlakdeel.

figuur 6



Rechte banen

Een punt P beweegt in een baan die gegeven is door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(a-t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(a-t) + \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le a \le \pi$$

De beweging van P kan ook beschreven worden door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(\tfrac{1}{2}a)\ \cos(\tfrac{1}{2}a - t) \\ y(t) = 2\sin(\tfrac{1}{2}a)\ \cos(\tfrac{1}{2}a - t) \end{cases}$$

4p **9** □ Toon dit aan.

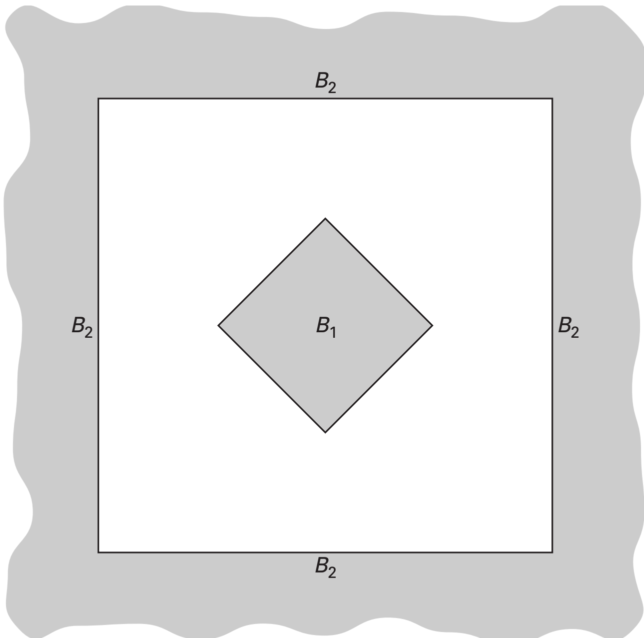
Als je voor enkele waarden van a de baan van P tekent, lijkt deze steeds een deel van een rechte lijn door (0, 0).

5p **10** □ Toon voor $a = 2$ aan dat de baan van P inderdaad een deel van een lijn $y = mx$ is.

Tussen twee vierkanten

In figuur 7 is binnen een groot vierkant een kleiner vierkant getekend. De vierkanten hebben hetzelfde middelpunt en zijn 45° ten opzichte van elkaar gedraaid.
B_1 is het binnengebied van het kleine vierkant, B_2 is het buitengebied van het grote vierkant.

figuur 7



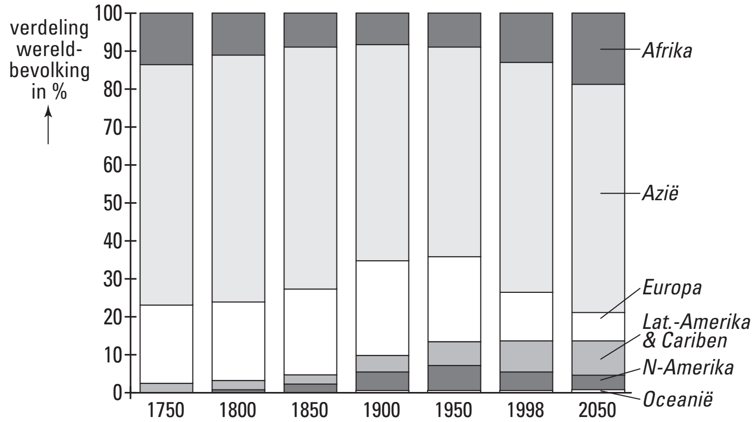
In de figuur op de bijlage is driekwart van de figuur afgedekt.

6p **11** □ Teken in het resterende kwart de conflictlijn van B_1 en B_2. Licht je tekening toe.

Wereldbevolking

Op 12 oktober 1999 werd de zesmiljardste wereldburger geboren. Naar aanleiding hiervan publiceerde de VN het jaarrapport *Six billion – a time for choices.* Hierin wijst de VN Sarajewo aan als plaats waar de zesmiljardste wereldburger geboren werd.
Dat is natuurlijk een symbolische daad: waar precies de zesmiljardste wereldburger geboren werd, is helemaal niet bekend. Het zou, gezien de bevolkingsgrootte van Azië, meer voor de hand gelegen hebben de zesmiljardste wereldburger geboren te laten worden in Azië. Zie figuur 8.

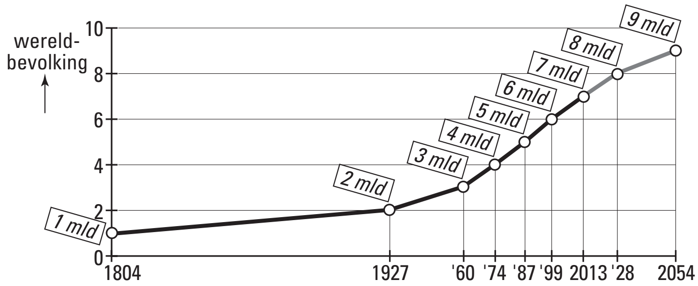
figuur 8



Op basis van figuur 8 nemen we aan dat het aandeel van Azië in de wereldbevolking tussen 1998 en 2050 nagenoeg gelijk blijft.
De zevenmiljardste wereldburger verwacht de VN in 2013 en de achtmiljardste in 2028. Stel dat de VN door loting een continent aanwijst waarin symbolisch de zevenmiljardste wereldburger geboren wordt en dat hierbij voor elk continent de kans om aangewezen te worden gelijk is aan het aandeel van dat continent in de wereldbevolking. En zo ook bij de achtmiljardste wereldburger.

5p **12** □ Bereken met behulp van figuur 8 hoe groot in dat geval de kans is dat de VN voor ten minste één van deze twee geboorten Azië aanwijst.

figuur 9



Figuur 9 komt uit het VN-rapport.
De grootte van de wereldbevolking voldoet bij benadering aan het volgende groeimodel:

$$W(t) = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot g^t}$$

Hierbij is:
- W de wereldbevolking in miljarden;
- t het aantal jaren na 1804;
- g een constante met $0 < g < 1$ en
- L de limietwaarde van de wereldbevolking in miljarden, dat is de grenswaarde waar W op den duur naar toe zal groeien.

De groeisnelheid $\frac{dW}{dt}$ van de wereldbevolking is het grootst als $t = {}^{g}\log\left(\frac{1}{L-1}\right)$.

5p **13** □ Toon aan dat voor die waarde van t geldt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4} L \cdot \ln(g)$.

De constante g is gelijk aan 0,983. De wereldbevolking t jaar na 1804 wordt dus gegeven door $W(t) = \frac{L}{1 + (L-1) \cdot 0{,}983^t}$.

De limietwaarde L is niet precies bekend.

We zijn geïnteresseerd in de kans dat de voorspelde wereldbevolking in 2054, 250 jaar na 1804, groter dan 10,5 miljard is, met andere woorden de kans dat $W(250) > 10{,}5$.

'$W(250) > 10{,}5$' komt overeen met '$L > 12{,}1$'.

5p **14** □ Leg dit uit.

Er zijn veel prognoses gemaakt. Daarin blijken de waarden van L normaal verdeeld te zijn met verwachtingswaarde 10 en standaardafwijking 1,5.

4p **15** □ Bereken onder bovengenoemde aannames in hoeveel procent van de prognoses de voorspelde wereldbevolking in 2054 groter is dan 10,5 miljard.

Einde