Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **03**

Tijdvak 1
Donderdag 22 mei
13.30 – 16.30 uur

**Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 10, 11, 15, 16, 18 en 19 is een bijlage toegevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

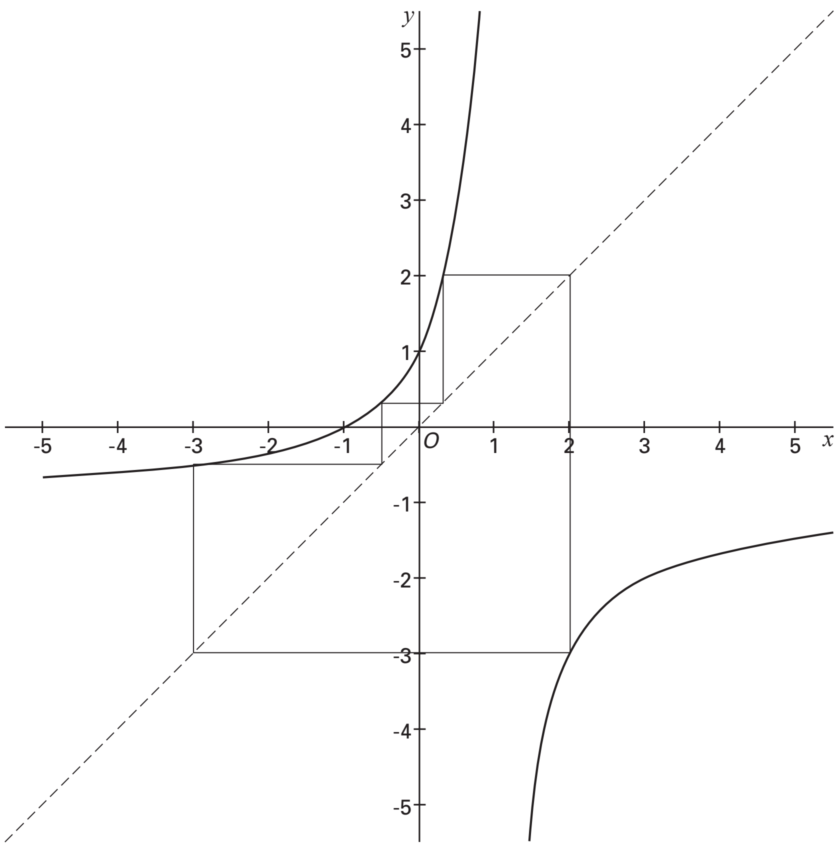
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Periodiek

Gegeven is de rij: $\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = \dfrac{1+u_{n-1}}{1-u_{n-1}} \end{cases}$

In de volgende twee vragen kiezen we de startwaarde $a = 2$.
In figuur 1 staat de webgrafiek van de rij bij deze startwaarde.

figuur 1



4p **1** ☐ Bereken u_1, u_2, u_3 en u_4.

5p **2** ☐ Bereken u_{999999}. Licht je antwoord toe.

We kunnen ook andere startwaarden a nemen dan 2. Als we $a = 0$ nemen, heeft de rij maar twee termen: u_0 en u_1; dan is de term u_2 namelijk niet gedefinieerd.
Behalve $a = 0$ zijn er nog twee startwaarden waarbij één van de termen in de rij u_n gelijk is aan 0. De daaropvolgende term in de rij is dan niet gedefinieerd.

5p **3** ☐ Welke twee startwaarden zijn dat? Licht je antwoord toe.

In de rest van deze opgave werken we met startwaarden waarbij u_1, u_2 en u_3 wèl gedefinieerd zijn. Bij zo'n startwaarde a kun je achtereenvolgens u_1 en u_2 bepalen.

6p **4** ☐ Toon langs algebraïsche weg aan dat de uitdrukking die je voor u_2 krijgt kan worden vereenvoudigd tot $\dfrac{-1}{a}$.

Nu je u_2 gevonden hebt, kun je u_4 ook bepalen.

4p **5** ☐ Toon aan dat $u_4 = a$.

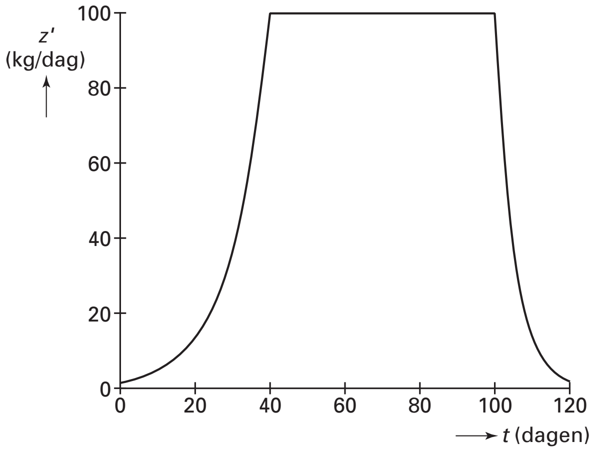
Zomertarwe

Een akker wordt op 1 april ingezaaid met zomertarwe. De tarwe wordt geoogst op 30 juli. In de 120 dagen tussen zaaien en oogsten groeien de planten niet steeds even hard. Aanvankelijk groeien de planten steeds sneller. Als de planten groter worden gaan ze elkaar meer hinderen, waardoor de groeisnelheid nagenoeg constant wordt. Tegen het einde van het groeiseizoen gaan de tarweplanten steeds langzamer groeien.
Het gewicht van de tarweplanten in kilogrammen noemen we z. De tijd in dagen noemen we t; $t = 0$ op 1 april, $t = 120$ op 30 juli.
$z'(t)$ is de snelheid waarmee z groeit op tijdstip t (in kg/dag). Biologen hanteren voor de drie groeifasen wel het volgende model:

- fase 1: exponentiële groei voor $0 \leq t < 40$ geldt: $z'(t) = 100 \cdot e^{0,1(t-40)}$
- fase 2: lineaire groei voor $40 \leq t < 100$ geldt: $z'(t) = 100$
- fase 3: tanende groei voor $100 \leq t < 120$ geldt: $z'(t) = 100 \cdot e^{-0,2(t-100)}$

In figuur 2 staat de grafiek van z'.

figuur 2



Bij elk tijdstip t_1 in fase 1 is er een tijdstip t_3 in fase 3 waarop de tarweplanten even snel groeien als op t_1.

4p **6** ☐ Bereken t_3 exact als $t_1 = 18$.

De hoeveelheid zaaigoed is 30 kg. Dus $z(0) = 30$.

Er zijn getallen a en b, zo dat voor fase 1 geldt: $z(t) = a \cdot e^{0,1(t-40)} + b$

4p **7** ☐ Bereken a en b. Rond de waarde van b af op twee decimalen.

Op elk tijdstip t is het gewicht te bepalen met $z(t) = z(0) + \int_0^t z'(s)\,ds$

Er geldt: $z(100) \approx 7011,68$.

6p **8** ☐ Toon dit aan.

3p **9** ☐ Bereken het gewicht van de tarweplanten op 30 juli.

Conflict tussen twee punten en een lijn

Gegeven zijn een lijn *k* en twee punten *A* en *B* op gelijke afstand van *k* en aan dezelfde kant van *k*. Zie figuur 3. Deze figuur staat ook twee keer op de bijlage.

figuur 3

We verdelen het vlak waar *A*, *B* en *k* in liggen volgens het naaste-buur-principe. De grenslijnen van deze verdeling zijn conflictlijnen.
Het punt *D* is het 'drielandenpunt', dat is het punt op gelijke afstand van *A*, *B* en *k*.

4p **10** ☐ Teken in de figuur op de bijlage het drielandenpunt *D*. Licht je werkwijze toe.

4p **11** ☐ Teken in de figuur op de bijlage de conflictlijnen. Licht je werkwijze toe.

Osteoporose

Osteoporose of botontkalking is een kwaal die vooral bij oudere mensen optreedt en verergert naarmate men ouder wordt. Bij het ouder worden maakt het lichaam minder bot aan dan er afgebroken wordt. Het gevolg is dat botten poreuzer worden en de kans op botbreuk dus toeneemt.

In deze opgave beperken we ons tot de risicogroep, personen van 55 jaar en ouder.
Onderzoek wijst uit dat 1 op de 4 vrouwen aan osteoporose lijdt.
Bij mannen is dat 1 op de 12.

Bij een controle op osteoporose onder 100 aselect gekozen vrouwen wordt bij een aantal vrouwen osteoporose geconstateerd.

3p **12** ☐ Bereken de kans dat dit aantal 30 is.

Bij een controle onder vijf aselect gekozen mannen en vijf aselect gekozen vrouwen wordt bij een aantal van hen osteoporose geconstateerd.

7p **13** ☐ Bereken de kans dat dit aantal 2 is.

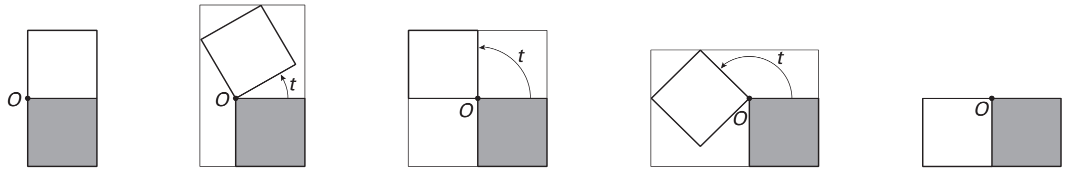
In 1998 bestond in Nederland de risicogroep voor 55,6% uit vrouwen.

4p **14** ☐ Bereken hoeveel procent van de osteoporose-patiënten uit de risicogroep vrouw was.

Twee scharnierende vierkanten

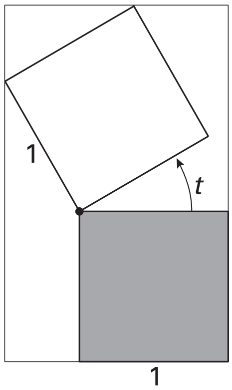
Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt *O* gemeenschappelijk. Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om *O* gedraaid; *t* is de draaihoek in radialen. In figuur 4 zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.

figuur 4



De oppervlakte *R* van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek *t*.
Voor elke waarde van *t* tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt: $R(t) = (1 + \sin t)(1 + \sin t + \cos t)$.
In figuur 5 en op de bijlage is de situatie getekend voor een waarde van *t* tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

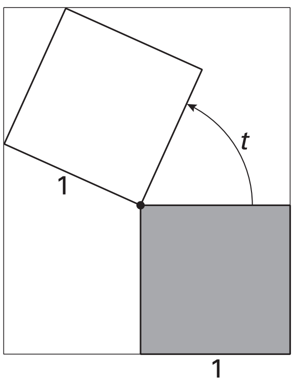
figuur 5



4p **15** ☐ Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van *t* tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

Er zijn tussen de begin- en de eindstand twee posities van de vierkanten waarvoor $R(t)$ maximaal is. In figuur 6 en op de bijlage is één van die posities getekend.

figuur 6



4p **16** ☐ Teken in de figuur op de bijlage de andere positie van de vierkantjes waarvoor $R(t)$ maximaal is. Licht je werkwijze toe.

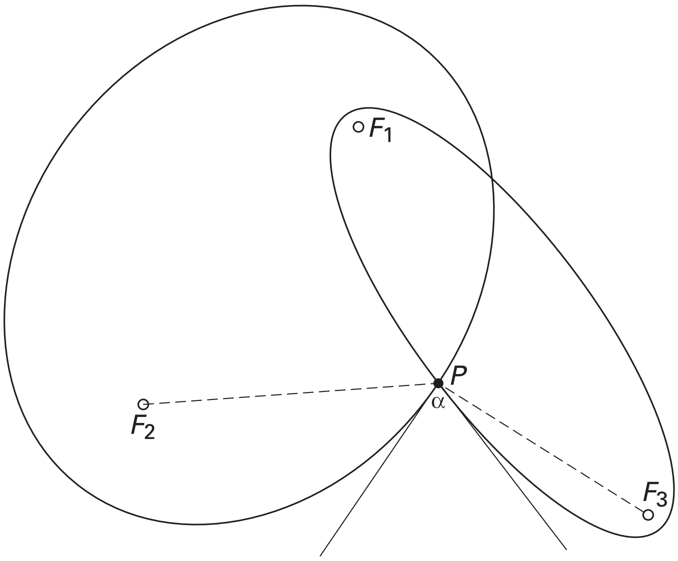
3p **17** ☐ Toon met behulp van differentiëren aan dat $R'(0) = 3$.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Twee ellipsen met een gemeenschappelijk brandpunt

Twee ellipsen hebben het brandpunt F_1 gemeenschappelijk; de andere twee brandpunten zijn F_2 en F_3. De ellipsen snijden elkaar in een punt P. Zie figuur 7. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 7



De raaklijnen in P aan de twee ellipsen maken vier hoeken met elkaar. De hoek tussen de twee halve raaklijnen die geheel buiten de ellipsen liggen, noemen we α.

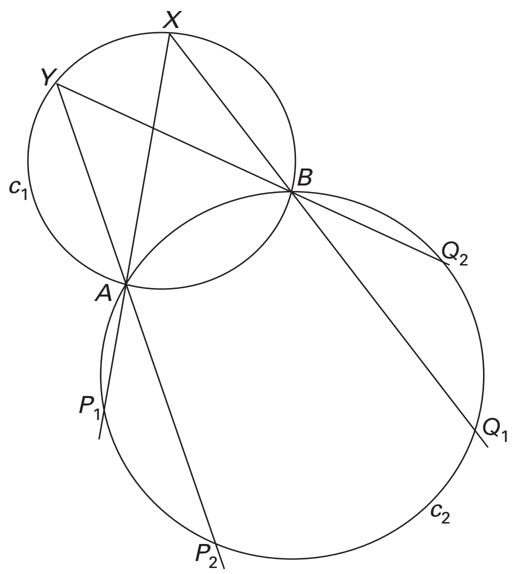
6p **18** ☐ Bewijs dat geldt: $\angle F_2PF_3 = 2\alpha$.

Constante booglengte

Twee cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in de punten A en B.
A en B verdelen c_1 in twee bogen: de ene boog ligt binnen c_2, de andere boog ligt buiten c_2.
Op de boog van c_1 buiten c_2 liggen de punten X en Y. De lijnen AX en BX snijden c_2 nog in de punten P_1 en Q_1. De lijnen AY en BY snijden c_2 nog in de punten P_2 en Q_2.
Zie figuur 8. Deze figuur staat ook op de bijlage.

6p **19** ☐ Bewijs dat de bogen P_1Q_1 en P_2Q_2 even groot zijn.

figuur 8



Einde