wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **04**

Tijdvak 1
Dinsdag 25 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 9, 10, 11, 15, 17 en 18 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Machten van een derdegraadsfunctie

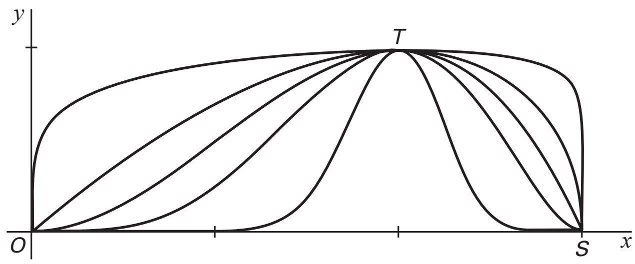
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ op het domein [0, 3].

V is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

5p **1** ☐ Bereken algebraïsch de exacte waarde van de oppervlakte van V.

Op het domein [0, 3] bekijken we de functies $g_p(x) = (f(x))^p = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)^p$, waarbij $p > 0$.
In figuur 1 zijn de grafieken van g_p getekend voor $p = 10$, $p = 2$, $p = 1$, $p = 0{,}5$ en $p = 0{,}1$. Al deze grafieken gaan door de punten $O(0, 0)$, $T(2, 1)$ en $S(3, 0)$.

figuur 1



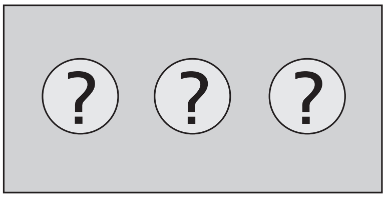
Voor *elke* positieve waarde van p gaat de grafiek van g_p door O, T en S.

3p **2** ☐ Toon dat aan.

Krasloten

Deze opgave gaat over krasloten waarmee je 3 euro of 6 euro of niets kunt ontvangen. Elk kraslot heeft drie vakjes, die je open kunt krassen. Zie figuur 2.

figuur 2



een nog niet opengekrast lot

In één van de vakjes is een MIN (–) verborgen, in de andere twee een PLUS (+).
Je kunt het kraslot inleveren na één vakje of na twee vakjes te hebben opengekrast. Voor elke opengekraste PLUS ontvang je 3 euro, maar als je de MIN hebt opengekrast, is het lot waardeloos geworden. Zie figuur 3.

figuur 3

bij inlevering 6 euro waard — waardeloos lot

Bij de mensen die de krasloten kopen onderscheiden we twee typen krassers:
- *waaghalzen*: krassen een tweede vakje open als het eerste vakje een PLUS oplevert;
- *angsthazen*: krassen één vakje open en stoppen.

Je kunt je afvragen welk type krasser het slimste is.

4p **3** ☐ Bereken voor zowel de *waaghalzen* als de *angsthazen* welk bedrag zij naar verwachting per opengekrast lot zullen ontvangen.

Bij een bepaalde kiosk is gebleken dat 65% van de krassers *waaghals* is en 35% *angsthaas*.
Op zekere dag komen 500 mensen een lot kopen bij deze kiosk en krassen het open.

5p **4** ☐ Bereken hoeveel van deze mensen naar verwachting niets uitbetaald krijgen.

Van een groep mensen bestaande uit 65 *waaghalzen* en 35 *angsthazen* heeft ieder precies één lot opengekrast.

6p **5** ☐ Bereken de kans dat uiteindelijk meer dan 60 mensen van deze groep precies één vakje hebben opengekrast.

Een verzameling functies

Op het domein $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies:
$f_n(x) = 1 + \sin^2 x + \cos nx$ waarbij n een positief geheel getal is.

De grafiek van f_n gaat voor bepaalde waarden van n door het punt $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4})$.

4p **6** ☐ Onderzoek voor welke waarden van n tussen 0 en 50 dit geldt.

$f_4(x)$ is te schrijven als $f_4(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 4x$.

3p **7** ☐ Toon aan dat dit juist is.

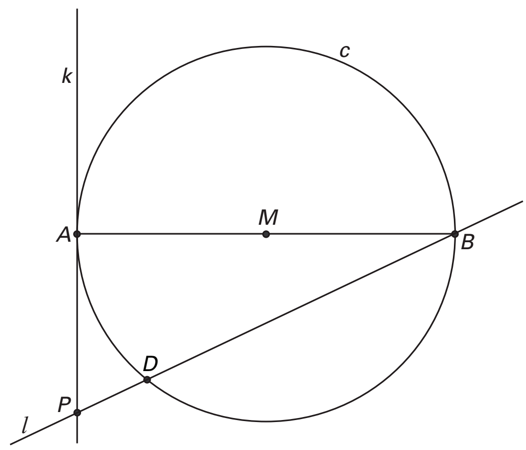
Gegeven is de rechthoek $OABC$ met $A(2\pi, 0)$ en $C(0, 3)$.
De grafiek van f_4 verdeelt deze rechthoek in twee gebieden.

7p **8** ☐ Toon aan met behulp van integreren dat deze twee gebieden exact dezelfde oppervlakte hebben.

Cirkel met lijnen

Gegeven is de cirkel c met middellijn AB en middelpunt M. Lijn k raakt c in A. Lijn l is een lijn door B die c in nog een ander punt D (ongelijk aan A) snijdt. P is het snijpunt van k en l. Zie figuur 4. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 4



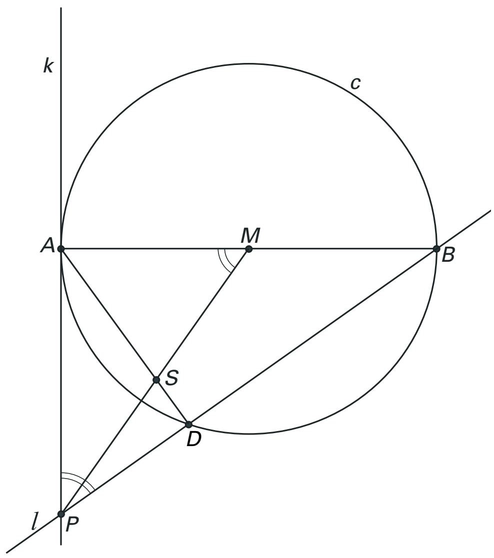
Er zijn twee cirkels die l raken en bovendien cirkel c in A raken.

5p **9** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de twee middelpunten van deze twee cirkels. Licht je werkwijze toe.

We gaan uit van dezelfde situatie als in figuur 4. Verder is gegeven dat $\angle AMP = \angle APD$. S is het snijpunt van AD en PM. Zie figuur 5. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

7p **10** ☐ Bewijs dat $AS = PS = MS$.

figuur 5



Grondprijs

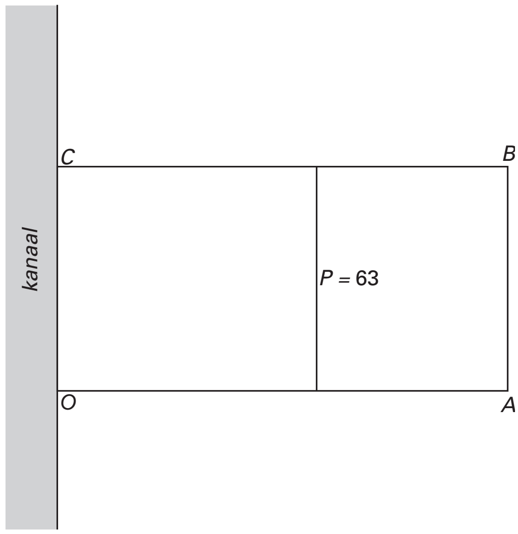
Een nieuw industrieterrein grenst aan een recht kanaal en heeft de vorm van een rechthoek $OABC$.
$OA = 400$ m en $OC = 200$ m. Zie figuur 6.

De grondprijs is afhankelijk van de afstand tot het kanaal: hoe dichter bij het kanaal, hoe duurder de grond.
Het verband tussen de grondprijs P (in euro per m^2) en de afstand tot het kanaal x (in meters) wordt gegeven door de formule:

$$P(x) = 100 \cdot 0{,}998^x$$

De punten waar P gelijk is aan 63 liggen op een lijn. Deze lijn is in figuur 6 getekend. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

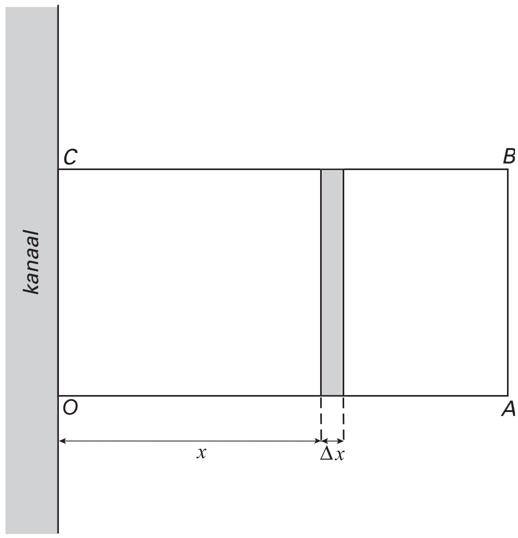
figuur 6



4p **11** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de lijn waarop alle punten liggen waar P gelijk is aan 55. Licht je antwoord toe.

Iemand wil een schatting maken van de grondprijs van het gehele terrein.
Daartoe verdelen we rechthoek $OABC$ in rechthoekjes met lengte 200 meter en breedte Δx meter.
In figuur 7 is één zo'n rechthoekje getekend op x meter van het kanaal.
Neem $P(x)$ als de prijs per m^2 voor het hele rechthoekje x meter van het kanaal. De totale grondprijs is dan bij benadering de som van de grondprijzen van deze rechthoekjes.

figuur 7



5p **12** ☐ Bereken op deze manier de totale grondprijs als $\Delta x = 5$ meter. Geef je antwoord in miljoenen euro, afgerond op twee decimalen.

De totale grondprijs is nauwkeuriger te berekenen met behulp van een integraal.

4p **13** ☐ Bereken de totale grondprijs met behulp van deze integraal.

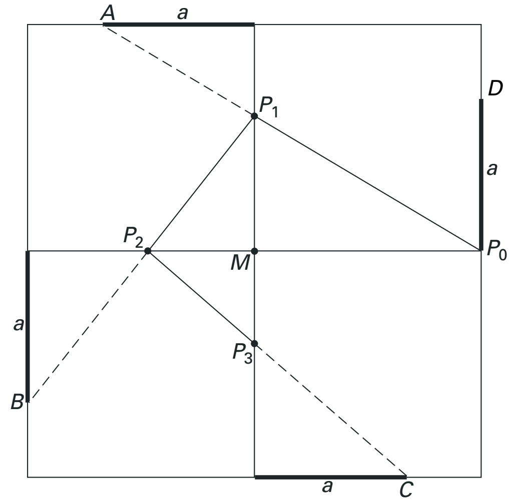
Ingesloten

In figuur 8 is een vierkant getekend met middelpunt M en zijden 2. In het vierkant zijn de horizontale en verticale symmetrieas getekend. Op afstand a van de middens van de zijden liggen de punten A, B, C en D. Hierbij is $0 < a \leq 1$.
We gaan een rij punten op de symmetrieassen construeren.

- Als startpunt P_0 kiezen we het midden van de rechterzijde
- P_0A snijdt een as in P_1
- P_1B snijdt een as in P_2
- P_2C snijdt een as in P_3
- P_3D snijdt een as in P_4

enzovoort.
In figuur 8 zijn de eerste drie stappen (dus tot en met punt P_3) uitgevoerd. Bij elke stap ontstaan twee gelijkvormige driehoeken.

figuur 8



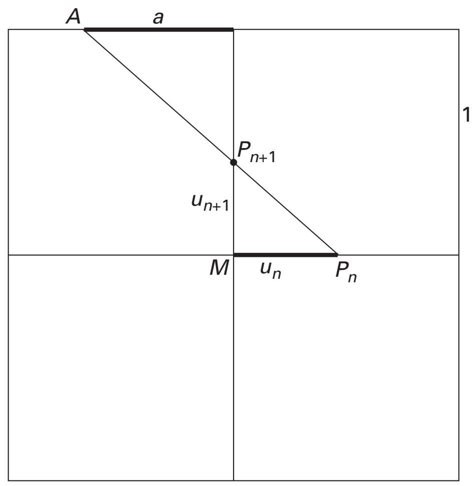
De lengte van MP_n noemen we u_n (n = 0, 1, 2, 3, ...). Dus $u_0 = MP_0 = 1$.

Neem $a = 1$. Dan liggen de punten A, B, C en D op de hoekpunten van het vierkant.

5p **14** ☐ Bereken voor dit geval u_1, u_2 en u_3.

We kiezen nu voor a een getal tussen 0 en 1. In figuur 9 zie je hoe uit u_n de volgende term u_{n+1} wordt gevonden. Figuur 9 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 9

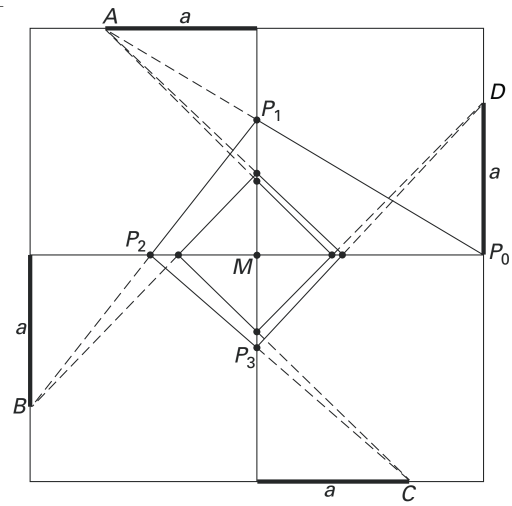


5p **15** ☐ Toon aan dat de volgende recursieve betrekking geldt: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + a}$.

We kiezen nu $a = \frac{2}{3}$.
Het proces wordt eindeloos herhaald. Er is een vierkant rond M dat steeds nauwer wordt ingesloten. Zie figuur 10.

5p **16** ☐ Bereken de oppervlakte van dit vierkant exact. Licht je antwoord toe met een berekening.

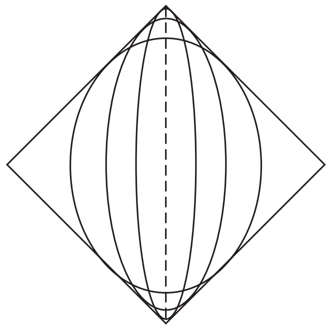
figuur 10



Ellipsen in een vierkant

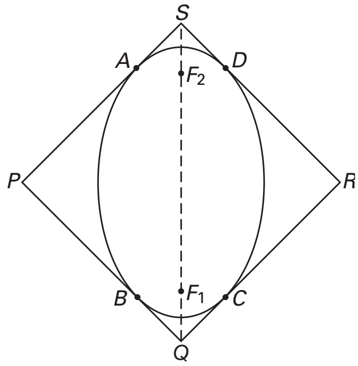
Gegeven is een vierkant waarvan één diagonaal verticaal is. Binnen dit vierkant tekenen we ellipsen die er precies in passen: de ellipsen raken aan de vier zijden van het vierkant. De brandpunten liggen op de verticale diagonaal van het vierkant.
In figuur 11 zie je het vierkant met daarin enkele mogelijke ellipsen getekend.

figuur 11



In figuur 12 en op de uitwerkbijlage is het vierkant nogmaals getekend met daarin één van de hierboven beschreven ellipsen.
P, Q, R en *S* zijn de hoekpunten van het vierkant. *A, B, C* en *D* zijn de raakpunten van de ellips met het vierkant. F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips. De lijn *PR* is een symmetrie-as van deze figuur.

figuur 12



Er geldt: $\angle PAF_1 = \angle QBF_1$.

5p **17** ☐ Bewijs dit.

PAF_1B is een koordenvierhoek.

4p **18** ☐ Bewijs dit.

Einde