wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

2004

Tijdvak 2
Woensdag 23 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 7, 13, 14, 15, 16 en 17 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Voedselbehoefte

In een zeker gebied wordt een grote toename van de bevolking voorzien. Om de daarmee gepaard gaande problemen het hoofd te kunnen bieden, heeft men een schatting nodig van de grootte van de bevolking voor de komende jaren. Daarvoor stelt men het volgende model op voor de grootte van de bevolking: $B(t) = 228 \cdot e^{0,1t}$.

Hierin is B het aantal mensen in duizenden en is t de tijd in jaren. Het komende jaar loopt van $t = 0$ tot $t = 1$. In deze opgave werken we met jaren van 360 dagen en maanden van 30 dagen.

4p **1** ☐ Bereken de procentuele toename van de bevolking per maand.

Voedseldeskundigen hanteren als vuistregel: *per persoon is er per dag 0,4 kg vast voedsel nodig*.
De totale benodigde hoeveelheid vast voedsel voor de inwoners van het gebied in het komende jaar noemen we V (in kg).
Iemand wil berekenen hoe groot V is.

Een schatting van V kan verkregen worden door voor iedere dag van het jaar de voedselbehoefte te berekenen en deze voedselbehoeften op te tellen.

5p **2** ☐ Bereken V volgens deze methode.

Een tweede methode om V te berekenen is met behulp van een integraal.

4p **3** ☐ Bereken V met behulp van primitiveren volgens deze tweede methode.

Spreekuur

Een huisarts heeft op elke werkdag twee uren gereserveerd voor een spreekuur. De ervaring heeft haar geleerd dat zij tijdens het spreekuur gemiddeld tien minuten voor een patiënt nodig heeft.
We maken bij deze situatie het volgende wiskundige model:

- elke werkdag komen er 12 patiënten op het spreekuur;
- de tijd die de huisarts tijdens het spreekuur voor een patiënt nodig heeft, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 minuten en een standaardafwijking van 4 minuten.

Voor sommige patiënten heeft de arts meer dan 15 minuten nodig.

4p **4** ☐ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal van zulke patiënten tijdens een spreekuur in twee decimalen nauwkeurig.

5p **5** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat tijdens een spreekuur minstens zes patiënten meer dan 10 minuten kosten.

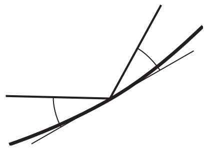
Neem aan dat de totale tijd die de arts voor 60 patiënten nodig heeft normaal verdeeld is met een gemiddelde van 600 minuten en een standaardafwijking van $4\sqrt{60}$ minuten.
In een week had de arts voor de 60 patiënten op haar spreekuur in totaal 654 minuten nodig. Dat is aanzienlijk meer dan de 600 minuten die je zou verwachten.

5p **6** ☐ Onderzoek of deze gegevens voldoende aanleiding geven om de veronderstelde gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen, bij een significantieniveau van 5%.

Een holle spiegel

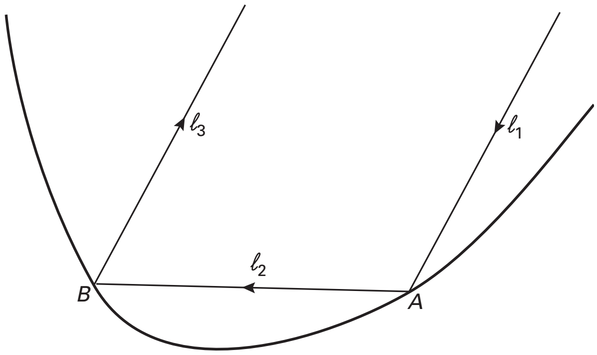
Als een lichtstraal wordt weerkaatst door een holle spiegel, maken de invallende en de weerkaatste lichtstraal gelijke hoeken met de raaklijn in het betreffende punt aan de spiegel. Zie figuur 1.

figuur 1



Een lichtstraal wordt twee keer door een holle spiegel weerkaatst: eerst in punt A en dan in punt B. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



We onderscheiden drie stukken van de lichtstraal:

- l_1 is het stuk vóórdat hij in A op de spiegel valt;
- l_2 is het stuk tussen de punten A en B;
- l_3 is het stuk nadat hij in B door de spiegel is weerkaatst.

6p **7** ☐ Bewijs dat geldt: als l_1 en l_3 evenwijdig zijn, staan de raaklijnen in A en B aan de spiegel loodrecht op elkaar.

De wijzers van een uurwerk

We volgen de eindpunten van de wijzers van een uurwerk. Daartoe brengen we een assenstelsel aan met de oorsprong in het draaipunt van de wijzers, de positieve x-as door "3 uur" en de positieve y-as door "12 uur". We rekenen de tijd t in uren, vanaf 0:00 uur.

De bewegingsvergelijkingen van het eindpunt van de grote wijzer zijn:
$x = 3\sin 2\pi t,\ \ y = 3\cos 2\pi t.$
De bewegingsvergelijkingen van het eindpunt van de kleine wijzer zijn:
$x = 2\sin \frac{1}{6}\pi t,\ \ y = 2\cos \frac{1}{6}\pi t.$

Op het tijdstip $t = 0$ liggen de wijzers over elkaar heen.

4p **8** ☐ Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop dit weer het geval is.

De (rechtstreekse) afstand tussen de eindpunten van de wijzers verandert voortdurend.

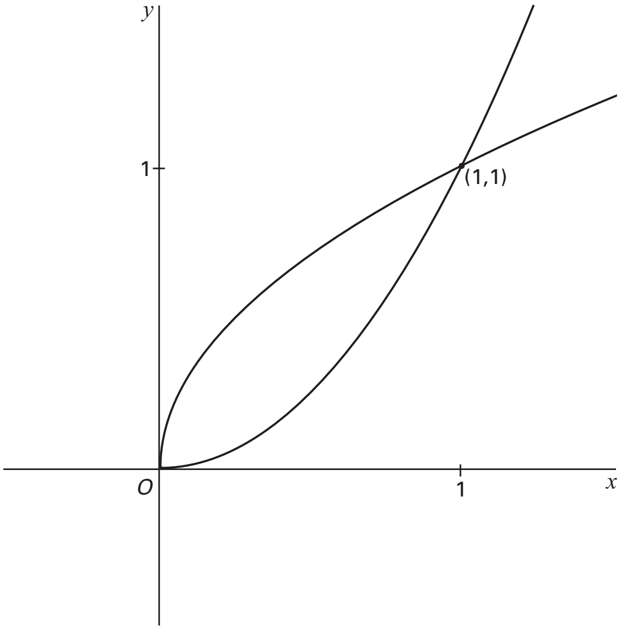
6p **9** ☐ Toon aan dat deze afstand op tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{13 - 12\cos\frac{11}{6}\pi t}$.

4p **10** ☐ Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop de eindpunten van de wijzers, samen met de oorsprong, een gelijkbenige driehoek vormen.

Twee halve parabolen

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, beide met domein $[0, \rightarrow\rangle$. Zie figuur 3.

figuur 3

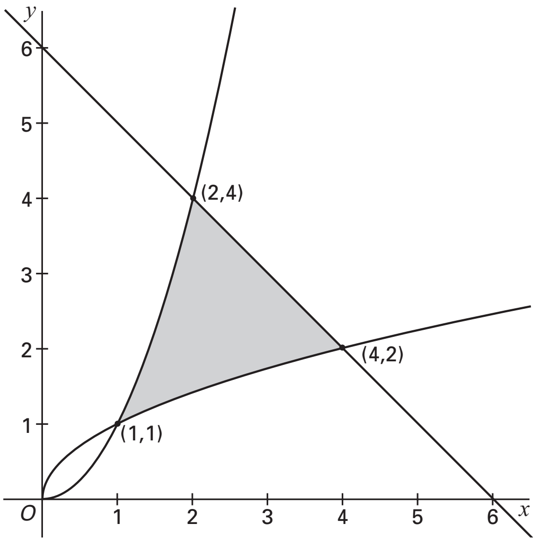


De lijn $x = p$, met $0 < p < 1$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

7p **11** ☐ Bereken de exacte waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

In figuur 4 zijn de grafieken van f en g en ook de lijn $y = 6 - x$ getekend. Het gebied ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn $y = 6 - x$, is in de figuur grijs gekleurd.

figuur 4

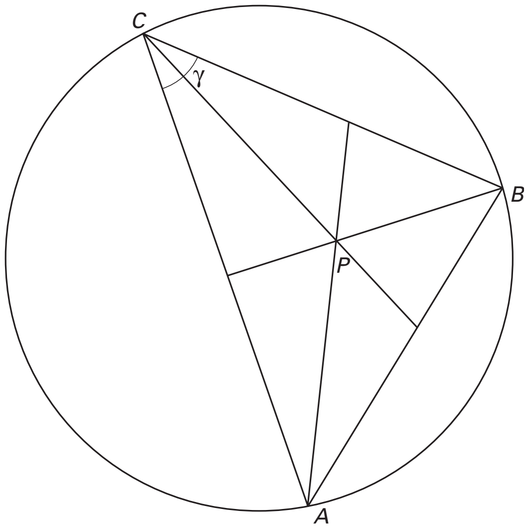


7p **12** ☐ Bereken algebraïsch de exacte oppervlakte van dit gebied.

Het bissectricepunt

Op een cirkel liggen twee vaste punten A en B en een bewegend punt C.
Het gemeenschappelijke punt van de bissectrices (deellijnen) van driehoek ABC is P; dit punt noemen we het *bissectricepunt* van de driehoek. $\angle ACB$ noemen we γ. Zie figuur 5. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 5

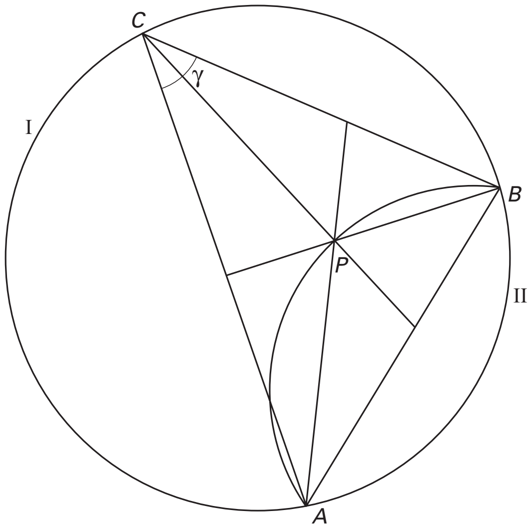


Er geldt: $\angle APB = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.

4p **13** ☐ Bewijs dit.

De punten A en B verdelen de cirkel in twee bogen: boog I (de grote boog waar in figuur 5 het punt C op ligt) en de kleinere boog II.
We laten het punt C boog I doorlopen. We bekijken de baan die het *bissectricepunt P* dan beschrijft. Deze baan is in figuur 6 getekend. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 6



4p **14** ☐ Bewijs dat deze baan een cirkelboog is.

Het middelpunt van de cirkel waarvan deze baan een deel is, noemen we M.

3p **15** ☐ Druk $\angle AMB$ uit in γ.

3p **16** ☐ Bewijs dat punt M op boog II ligt.

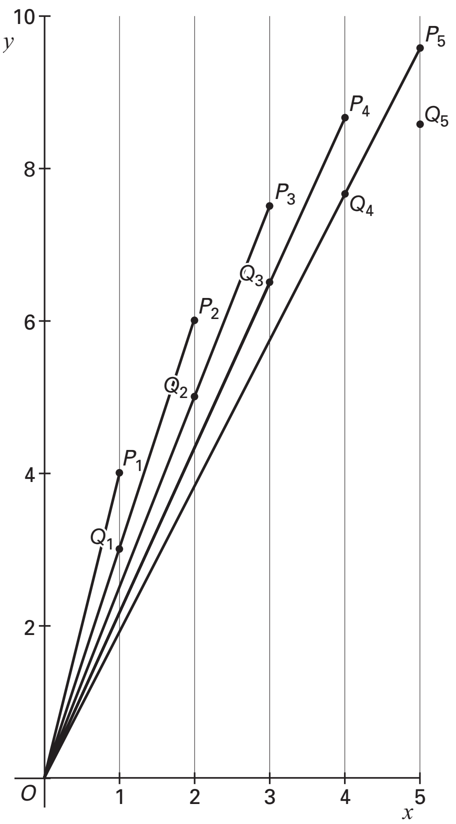
Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Een rij punten

We definiëren in een assenstelsel twee rijen punten P_n en Q_n (n = 1, 2, 3, …) als volgt:

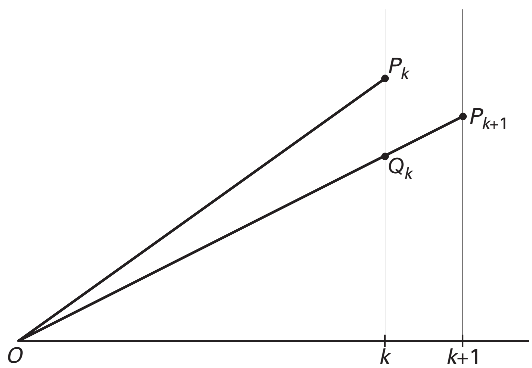
- P_1 is het punt (1, 4).
  Q_1 ligt recht onder P_1, op afstand 1 van P_1, dus $Q_1 = (1, 3)$.
- P_2 is het snijpunt van de lijn OQ_1 met de lijn $x = 2$.
  Q_2 ligt recht onder P_2, op afstand 1 van P_2.
- P_3 is het snijpunt van de lijn OQ_2 met de lijn $x = 3$.
  Q_3 ligt recht onder P_3, op afstand 1 van P_3.
  Enzovoort.
  In figuur 7 zijn van beide rijen de eerste vijf punten aangegeven.

figuur 7



De richtingscoëfficiënt van de lijn OP_k noemen we r_k (k = 1, 2, 3, ...). Van de rij van richtingscoëfficiënten kun je de eerste drie termen uitrekenen: $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ en $r_3 = 2\frac{1}{2}$.
Uit elke term r_k kan de volgende term r_{k+1} berekend worden met de recursieve formule:
$r_{k+1} = r_k - \frac{1}{k}$ (k = 1, 2, 3, ...).
Zie figuur 8. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 8



4p **17** ☐ Toon de juistheid van de recursieve formule aan.

Uit figuur 7 blijkt dat de hoogtes van de eerste vijf punten P_1, P_2, P_3, P_4 en P_5 weliswaar een stijgende rij vormen, maar dat de toenames in hoogte steeds minder worden. Hoe het verdere verloop van de hoogtes is, is niet onmiddellijk duidelijk.

4p **18** ☐ Onderzoek met behulp van de grafische rekenmachine voor welke waarden van n de punten P_n onder de x-as liggen. Licht je werkwijze toe.

Ook zonder grafische rekenmachine kan worden aangetoond dat de punten P_n voor voldoend grote waarden van n onder de x-as komen te liggen. Daarvoor mag je gebruiken dat de limiet voor n nadert tot oneindig van $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ oneindig is.

4p **19** ☐ Toon met behulp van deze limiet aan dat de punten P_n voor voldoend grote waarden van n onder de x-as liggen.

Einde