wiskunde B1,2

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 05

Tijdvak 1
Dinsdag 31 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 89 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de beantwoording van de vragen 4, 5, 6, 10, 13, 14 en 18 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Inademen

Bij controlemetingen aan de ademhaling wordt men gevraagd om diep uit te ademen en vervolgens gedurende vijf seconden zo diep mogelijk in te ademen.
Tijdens het inademen is de hoeveelheid verse lucht in de longen een functie van de tijd.
Voor gezonde mensen gebruiken we het volgende model: $L(t) = 3,6(1 - e^{-2,5t})$.
Hierbij is L de hoeveelheid verse lucht in liters en t de tijd in seconden ($0 \le t \le 5$).

De maximale hoeveelheid verse lucht in de longen van gezonde mensen is volgens dit model ongeveer 3,6 liter.

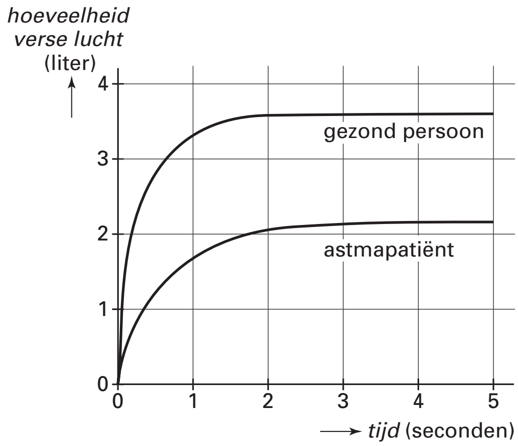
3p **1** ☐ Bereken na hoeveel seconden 90% van deze maximale hoeveelheid verse lucht is ingeademd.

Astma is een aandoening aan de luchtwegen. Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat dit maximum bereikt wordt. Voor astmapatiënten gebruiken we het model: $L_\alpha(t) = \alpha \cdot 3,6(1 - e^{-2,5\alpha t})$.
Hierbij is α een constante tussen 0 en 1 die afhankelijk is van de zwaarte van de astma.

In figuur 1 is de grafiek van de hoeveelheid ingeademde verse lucht getekend voor een gezond persoon en voor een zekere astmapatiënt.

4p **2** ☐ Bereken voor deze astmapatiënt α in één decimaal nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

figuur 1



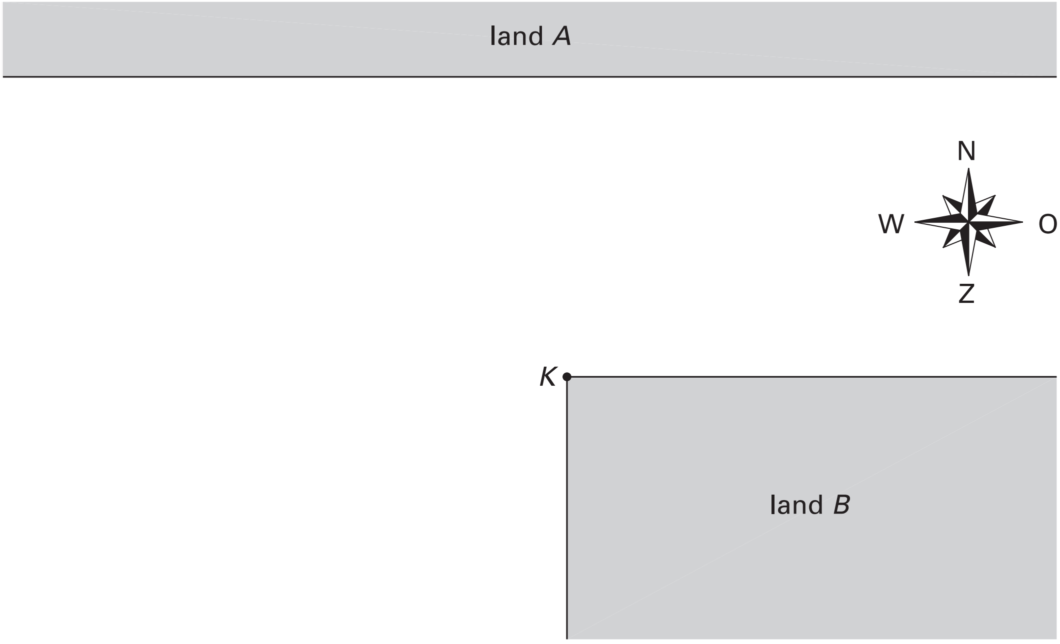
Ga bij de volgende vraag weer uit van de formule $L_\alpha(t) = \alpha \cdot 3,6(1 - e^{-2,5\alpha t})$.
De snelheid waarmee de hoeveelheid verse lucht toeneemt, is maximaal op het tijdstip $t = 0$.

5p **3** ☐ Bereken voor welke waarde van α deze maximale snelheid gelijk is aan 4,5 liter per seconde.

Betwist gebied

Twee landen A en B worden gescheiden door een zee. De kustlijn van A is recht en loopt west-oost. De kustlijn van B maakt bij kaap K een hoek van 90°; een deel van de kustlijn loopt noord-zuid en een deel west-oost. De afstand tussen de kustlijnen die west-oost lopen is 40 km. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Beide landen maken aanspraak op een deel van de zee. Ze vinden beide dat de strook tot 30 km uit de kust hen toebehoort. Voor een groot deel van de zee zijn de landen het erover eens van wie het is, maar een deel van de zee blijft betwist gebied.

4p **4** ☐ Arceer in de figuur op de uitwerkbijlage het betwiste gebied.

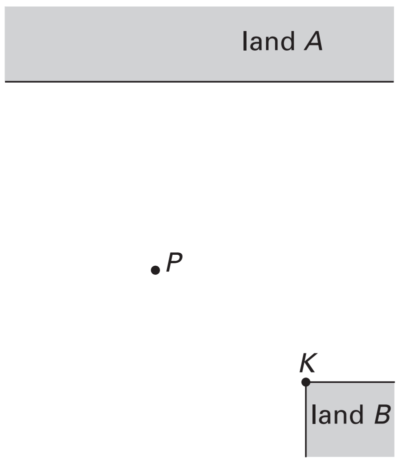
De zee zou verdeeld kunnen worden volgens het naaste-buurprincipe.

4p **5** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de hierbij behorende grenslijn. Licht je werkwijze toe.

In figuur 3 en op de uitwerkbijlage is een punt P getekend van de grenslijn bij verdeling volgens het naaste-buurprincipe. Het betwiste gebied heeft een noordrand en een zuidrand.

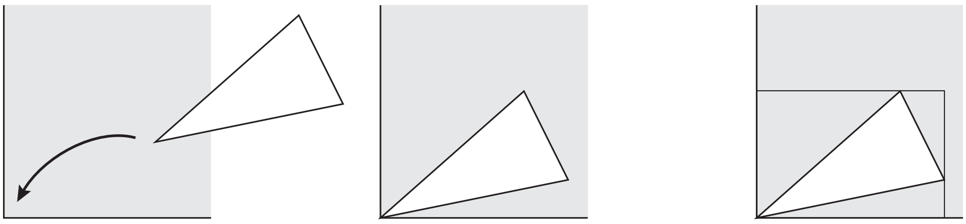
3p **6** ☐ Toon aan dat P even ver van beide randen afligt.

figuur 3



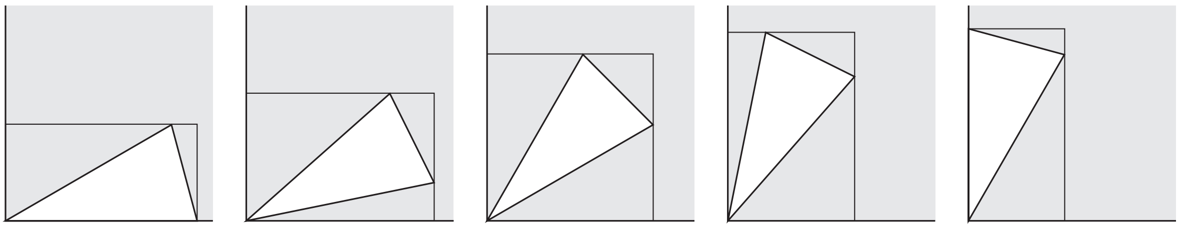
Rechthoek om driehoek

figuur 4



Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 30° ($\frac{1}{6}\pi$ radialen) en twee zijden van lengte 1 wordt op een rechthoekig blaadje papier gelegd met de top in een hoekpunt van het papier. Zie figuur 4.
Vervolgens wordt door elk van de andere hoekpunten van de driehoek een lijn getrokken evenwijdig aan een rand van het blaadje. Door de getekende lijnen en de randen van het blaadje papier wordt zo een rechthoek gevormd.

figuur 5

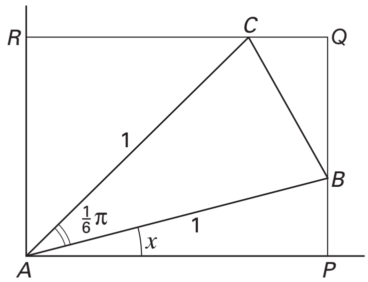


In figuur 5 is bij vijf verschillende posities van de driehoek de bijbehorende rechthoek getekend.

In figuur 6 zijn voor een willekeurige situatie letters bij de hoekpunten gezet.
Om driehoek ABC met tophoek A is rechthoek $APQR$ gevormd.
Bij elke stand van driehoek ABC hoort een hoek PAB. Noem de grootte van deze hoek x radialen, dus $\angle PAB = x$, met $0 \leq x \leq \frac{1}{3}\pi$.

Verder is $AB = AC = 1$ en $\angle BAC = \frac{1}{6}\pi$.

figuur 6



De oppervlakte van rechthoek $APQR$ is een functie van x en wordt aangegeven met $O(x)$.
Er geldt: $O(x) = \cos x \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi - x)$.

4p **7** ☐ Toon dit aan.

Voor de afgeleide functie van O geldt: $O'(x) = \sin(\frac{1}{3}\pi - 2x)$.

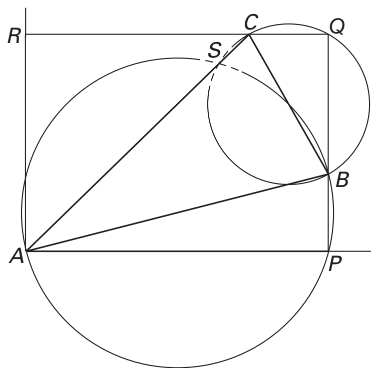
5p **8** ☐ Toon dit langs algebraïsche weg aan.

4p **9** ☐ Bereken de exacte waarden die $O(x)$ kan aannemen.

De omgeschreven cirkels van de driehoeken APB en BQC snijden elkaar in het punt B en in een tweede punt S. Zie figuur 7. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

6p **10** ☐ Bewijs dat S op zijde AC ligt.

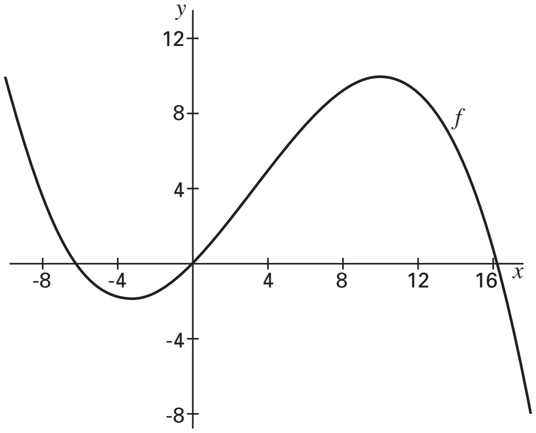
figuur 7



Richtingen

Gegeven is de functie $f(x) = -0,01x^3 + 0,1x^2 + x$.
In figuur 8 is de grafiek van f getekend.

figuur 8



De raaklijn in de oorsprong aan de grafiek van f gaat door een top van de grafiek van f.

6p **11** ☐ Toon dit langs algebraïsche weg aan.

Verder is gegeven het punt $A(0, 4)$.
Voor elk punt $P(x, f(x))$ op de grafiek van f tussen de punten $O(0, 0)$ en $(10, 10)$ bekijken we de lijn AP.

4p **12** ☐ Bereken de x-coördinaat van het punt P waarbij de lijn AP de grootste richtingscoëfficiënt heeft.

Voor iedere startwaarde u_0 wordt een oneindige rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ vastgelegd door de formule $u_{n+1} = f(u_n)$.
We beperken ons tot startwaarden uit het interval $[-10, 18]$: $-10 \leq u_0 \leq 18$.
Voor elk van deze startwaarden heeft de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ als limiet de waarde 0 of de waarde 10.
De startwaarden waarvoor deze limiet de waarde 0 heeft, vormen twee intervallen $[a, b]$ en $[c, d]$.

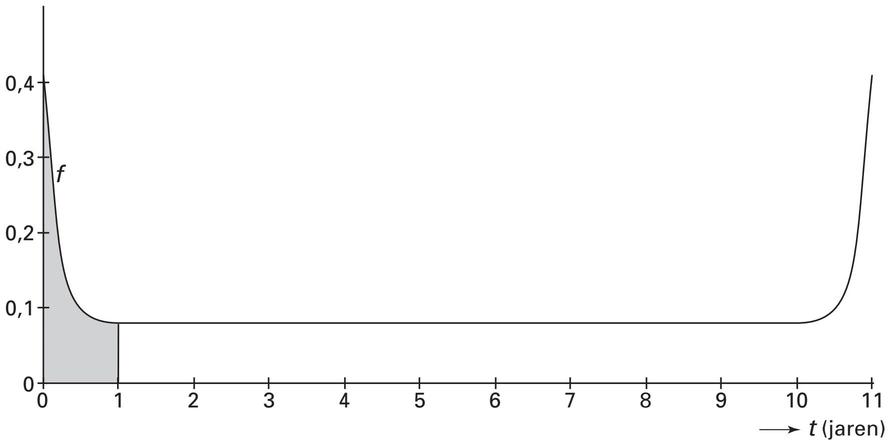
5p **13** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de plaatsen van a, b, c en d op de x-as.

De badkuipkromme

Bij veel in massaproductie vervaardigde apparaten is de levensduur afhankelijk van het toeval. Bij de modellering daarvan onderscheidt men vaak drie tijdsintervallen:
- een korte *beginperiode*, waarin fabricage- en materiaalfouten aan het licht komen; er gaan dan relatief veel apparaten stuk
- een (lange) *normale werkperiode*, waarin slechts weinig apparaten stukgaan
- een korte *eindperiode*, waarin vrijwel alle apparaten door veroudering en slijtage stukgaan.

Figuur 9 illustreert een wiskundig model dat voor de analyse van de levensduur van een bepaald type apparaten gebruikt wordt. Het gaat om apparaten waarbij de begin- en eindperiode beide ongeveer een half jaar duren en de normale werkperiode ongeveer 10 jaar bedraagt. De apparaten worden maximaal 11 jaar oud.

figuur 9



Op de horizontale as van figuur 9 staat de tijd t, gemeten in jaren. De figuur toont de grafiek van een functie f waarvoor geldt dat de oppervlakte onder de grafiek op het interval $0 \leq t \leq 11$ gelijk is aan 1. Voor ieder tijdstip a tussen 0 en 11 jaar is de kans dat een willekeurig apparaat stukgaat vóórdat het een leeftijd van a jaren bereikt, gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek van f tussen de tijdstippen $t = 0$ en $t = a$. In figuur 9 is voor $a = 1$ die oppervlakte grijs aangegeven. De grafiek van f wordt vanwege de vorm een *badkuipkromme* genoemd.
In dit geval heeft de badkuipkromme de volgende eigenschappen:
- de grafiek is symmetrisch in de lijn $t = 5{,}5$
- de oppervlakte onder de grafiek tussen $t = 0$ en $t = 1$ is ongeveer 0,14
- de grafiek loopt tussen $t = 1$ en $t = 10$ ongeveer horizontaal.

De kans op stukgaan tussen 0 en a jaar (met $0 \leq a \leq 11$) noemen we $F(a)$. Dus $F(1) \approx 0{,}14$.

5p **14** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van F. Licht je werkwijze toe. De grafiek moet in overeenstemming zijn met de hierboven genoemde eigenschappen van de badkuipkromme.

Voor de badkuipkromme van figuur 9 geldt het functievoorschrift

$$f(t) = 0{,}08 + 2 \cdot 10^{-23} \cdot (t - 5{,}5)^{30}$$

6p **15** ☐ Bereken met behulp van primitiveren de kans op stukgaan tijdens het eerste halfjaar.

De fabrikant geeft één jaar garantie op het apparaat. Als het binnen één jaar stukgaat, wordt het gratis vervangen door een nieuw exemplaar. Ook dat kan weer binnen een jaar stukgaan, waarna ook dat exemplaar gratis wordt vervangen, enzovoort.
Iemand koopt vier van deze apparaten.

5p **16** ☐ Bereken de kans dat precies één keer een apparaat van deze persoon gratis wordt vervangen door een nieuw exemplaar.

Als de gemiddelde levensduur van een apparaat 5,5 jaar is, geldt voor het trekken van een aselecte steekproef van 150 apparaten: de gemiddelde levensduur van de 150 apparaten in de steekproef is bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde 5,5 jaar en standaardafwijking 0,285 jaar.

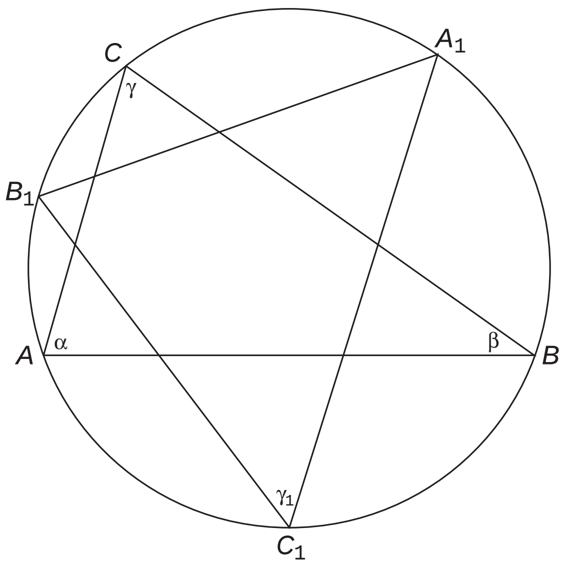
Van een groep van 150 aselect gekozen apparaten bleek de gemiddelde levensduur slechts 5,1 jaar te zijn.

5p **17** ☐ Geeft dit voldoende aanleiding om de veronderstelde gemiddelde levensduur van een apparaat naar beneden bij te stellen? Neem een significantieniveau van 10%.

Middens van bogen

Gegeven is driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel.
De hoeken van deze driehoek zijn α, β en γ.
A_1, B_1 en C_1 zijn de middens van de bogen BC, CA en AB.
$\angle A_1C_1B_1$ noemen we γ_1. Zie figuur 10. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 10



Er geldt: $\gamma_1 = \frac{1}{2}(180° - \gamma)$.

4p **18** ☐ Bewijs dit.

A_2, B_2 en C_2 zijn de middens van de bogen B_1C_1, C_1A_1 en A_1B_1.
$\angle A_2C_2B_2$ noemen we γ_2.
Op eenzelfde manier definiëren we γ_3, γ_4, enzovoort.
Op dezelfde manier als in vraag 18 kun je voor n = 1, 2, 3, … aantonen dat:
$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2}(180° - \gamma_n)$.

Deze formule is te herschrijven tot de formule $\gamma_{n+1} - 60° = -\frac{1}{2}(\gamma_n - 60°)$.

3p **19** ☐ Toon dit aan.

4p **20** ☐ Laat zien hoe uit de formule $\gamma_{n+1} - 60° = -\frac{1}{2}(\gamma_n - 60°)$ volgt dat de rij γ_1, γ_2, γ_3, … convergent is en bepaal de limiet van deze rij.

Einde