wiskunde B1,2

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **06**

Tijdvak 2
Woensdag 21 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 5, 12, 16 en 17 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

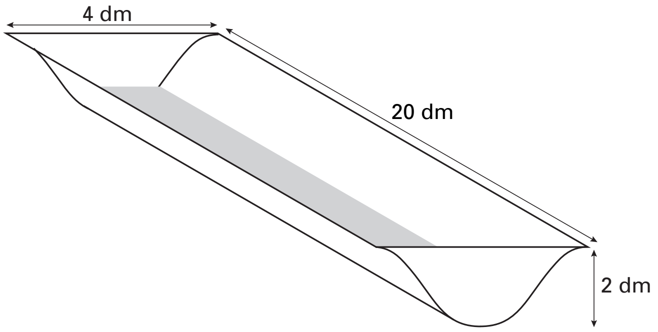
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Drinkbak

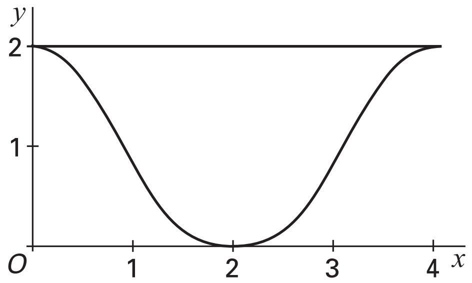
In figuur 1 staat een tekening van een drinkbak voor dieren. De bak bestaat uit drie delen: een rechthoekige, metalen plaat die gebogen is tot een symmetrische goot, een voorkant en een achterkant die aan de goot gelast zijn.
De bak is 20 dm lang, 4 dm breed en 2 dm diep.

figuur 1



In figuur 2 is het vooraanzicht van de goot getekend in een assenstelsel.

figuur 2

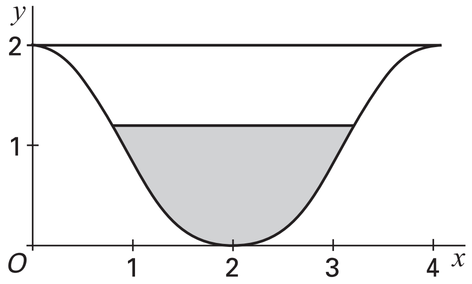


De gebogen vorm van deze goot is de grafiek van de functie:
$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$ (x en y in dm en $0 \leq x \leq 4$)

4p **1** ☐ Toon algebraïsch aan dat de helling van de grafiek van f gelijk is aan 0 voor $x = 0$ en voor $x = 4$.

De waterspiegel heeft de vorm van een rechthoek, waarvan de lengte 20 dm is. De breedte van de waterspiegel varieert met de waterhoogte.
In figuur 3 is in het assenstelsel het vooraanzicht van de bak getekend bij een bepaalde waterhoogte.

figuur 3



3p **2** ☐ Bereken de waterhoogte als de breedte van de waterspiegel 2,4 dm is.

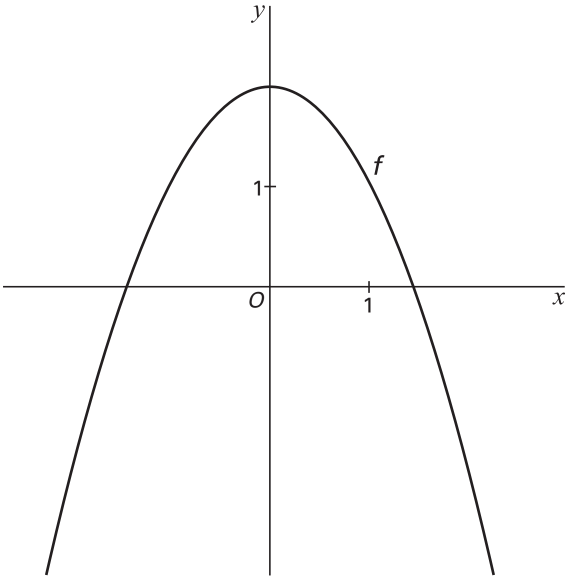
6p **3** ☐ Bereken in liters nauwkeurig hoeveel water de bak bevat als hij tot de rand toe gevuld is.

5p **4** ☐ Bereken in dm^2 nauwkeurig de oppervlakte van de rechthoekige plaat waarvan het gebogen deel van de drinkbak gemaakt is.

Met verschillende startwaarden

In figuur 4 en op de uitwerkbijlage staat de grafiek van de functie $f(x) = 2 - x^2$.
Na keuze van een startwaarde u_0 is de rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ vastgelegd door $u_n = f(u_{n-1})$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

figuur 4



In de figuur op de uitwerkbijlage is een startwaarde u_0 op de x-as aangegeven.

4p **5** ☐ Teken op de x-as met behulp van een webgrafiek in de figuur op de uitwerkbijlage de plaatsen van u_1, u_2 en u_3.

Er zijn twee startwaarden waarbij de rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ constant is.

3p **6** ☐ Bereken deze startwaarden exact.

Neem $u_0 = a$.
Er zijn twee startwaarden a zodat de rij bestaat uit twee verschillende getallen a en b die elkaar afwisselen; de rij wordt dan $a, b, a, b, a, \ldots$ met $b \neq a$.

6p **7** ☐ Bereken beide waarden van a in drie decimalen nauwkeurig.

Levensduur van chips

In elektronische apparatuur worden veel chips gebruikt. Om de levensduur van chips te bepalen kan men niet gewoon wachten totdat ze stukgaan. Dat kan namelijk wel 20 à 30 jaar duren! Daarom past men zogenaamde stress-methoden toe: men onderwerpt de chips aan extreme omstandigheden, bijvoorbeeld hoge temperatuur, zodat ze sneller stukgaan. Vervolgens kan men de onder extreme omstandigheden gevonden levensduur terugrekenen naar de levensduur onder normale omstandigheden.

Bij hoge-temperatuurstress werkt men met het model van Arrhenius: $g(T) = 1{,}1 \cdot 10^{-10} \cdot e^{\frac{a}{T}}$.
Hierbij is g de levensduur (in jaren), T de temperatuur (in kelvin) en a een constante.

De levensduur van een chip van type A blijkt bij een temperatuur van 373 kelvin 0,1 jaar te zijn.

4p **8** ☐ Toon door berekening aan dat bij kamertemperatuur (293 kelvin) de levensduur van zo'n chip ongeveer 28 jaar is.

Neem bij de volgende vraag $a = 7700$.
Een gebruiker wil weten hoe snel g bij toenemende temperatuur verandert als $T = 293$.

4p **9** ☐ Bereken deze snelheid met behulp van differentiëren.

Neem aan dat de levensduur van chips van type B bij gebruik bij kamertemperatuur normaal verdeeld is met een verwachtingswaarde μ van 8,0 jaar en een standaardafwijking σ van 2,0 jaar.

Een klant koopt 500 chips van type B.

5p **10** ☐ Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat meer dan 50 van deze chips binnen 5 jaar stukgaan.

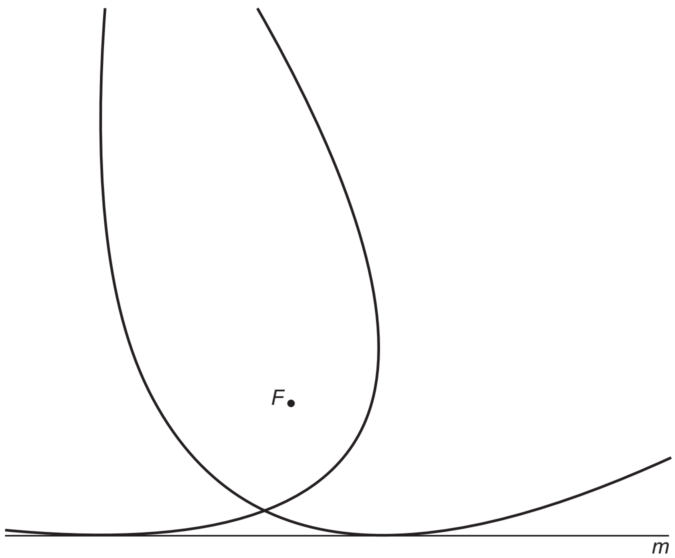
Van de chips van type B vermoedt men dat μ kleiner is dan 8,0 jaar. Om dat te onderzoeken past een laboratorium hoge-temperatuurstress toe op 50 chips van type B.
Als de levensduur van de chips van dit type normaal verdeeld is met $\mu = 8{,}0$ en $\sigma = 2{,}0$ dan is de gemiddelde levensduur van de chips bij een steekproef van 50 chips normaal verdeeld met $\mu = 8{,}0$ en $\sigma = \dfrac{2{,}0}{\sqrt{50}}$.
Met de resultaten van het laboratorium heeft men berekend dat deze chips bij kamertemperatuur een gemiddelde levensduur van 7,2 jaar gehad zouden hebben.
De aanname dat de levensduur van chips van type B bij gebruik bij kamertemperatuur normaal verdeeld is met een verwachtingswaarde μ van 8,0 jaar en een standaardafwijking σ van 2,0 jaar noemt men de nulhypothese.

5p **11** ☐ Geeft deze uitkomst van 7,2 jaar voldoende aanleiding om bij een significantieniveau van 1% de nulhypothese te verwerpen?

Met vast brandpunt en vaste raaklijn

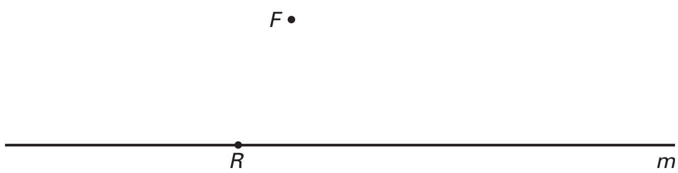
Gegeven zijn een punt F en een lijn m.
We bekijken alle parabolen met F als brandpunt die raken aan de lijn m. In figuur 5 zijn twee voorbeelden getekend.

figuur 5



Op de lijn m wordt een punt R gekozen. Zie figuur 6. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 6

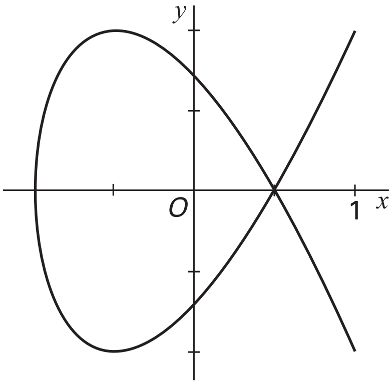


6p **12** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de top van de parabool die F als brandpunt heeft en die m raakt in het punt R. Licht je werkwijze toe.

α-baan

De plaats van een bewegend punt P in een assenstelsel wordt gegeven door:
$x(t) = \cos 2t$ en $y(t) = \cos 3t$, waarbij t de tijd voorstelt, met $0 \le t \le \pi$.
De baan van het punt P lijkt op de Griekse letter α. Zie figuur 7.

figuur 7



We vergelijken de tijdsduur dat P links van de lijn $x = 0$ is met de tijdsduur dat P rechts van die lijn is.

4p **13** ☐ Toon aan dat P zich exact even lang links van de lijn $x = 0$ bevindt als rechts ervan.

Tijdens de beweging verandert de afstand van het punt P op de baan tot het punt $O(0, 0)$.

4p **14** ☐ Bereken de minimale waarde van de afstand OP in twee decimalen nauwkeurig.

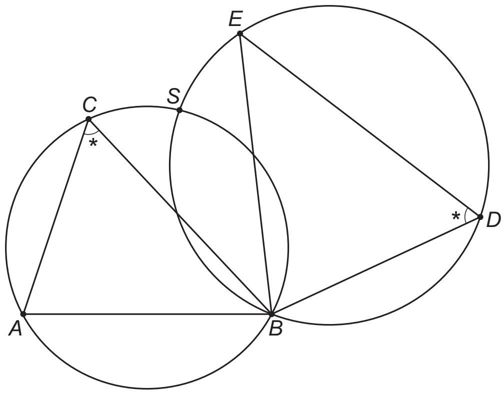
Tijdens de beweging verandert de snelheid van het punt P.

5p **15** ☐ Onderzoek of de grootste snelheid van het punt P wordt bereikt op het tijdstip $t = \frac{1}{2}\pi$.

Op één lijn

Gegeven zijn twee driehoeken ABC en BDE met $\angle ACB = \angle BDE$.
De omgeschreven cirkels van deze driehoeken snijden elkaar in de punten B en S.
Zie figuur 8. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 8



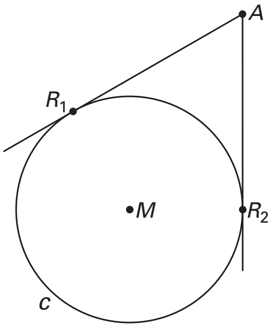
4p **16** ☐ Bewijs dat S op de lijn AE ligt.

Punten buiten een cirkel

Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt M en een punt A buiten c.
Vanuit punt A worden de beide raaklijnen aan c getrokken. De raakpunten zijn R_1 en R_2.
Gegeven is dat de lengte van de (kleinste) boog R_1R_2 gelijk is aan $\frac{1}{3}$ deel van de omtrek van c.

Zie figuur 9. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

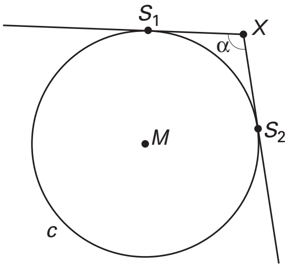
figuur 9



6p **17** ☐ Toon aan dat de afstand van A tot c de helft is van AM.

Vanuit een punt X buiten c worden de twee halve lijnen getrokken die aan c raken. De raakpunten noemen we S_1 en S_2 De hoek die de halve lijnen met elkaar maken, noemen we α. Zie figuur 10.

figuur 10



G is het gebied van alle punten X buiten c waarvoor de bijbehorende hoek α stomp is.

6p **18** ☐ Toon aan dat de oppervlakte van G gelijk is aan de oppervlakte van c.

Einde