wiskunde B1

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 **06**

Tijdvak 1
Vrijdag 19 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 23 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de beantwoording van vraag 2 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

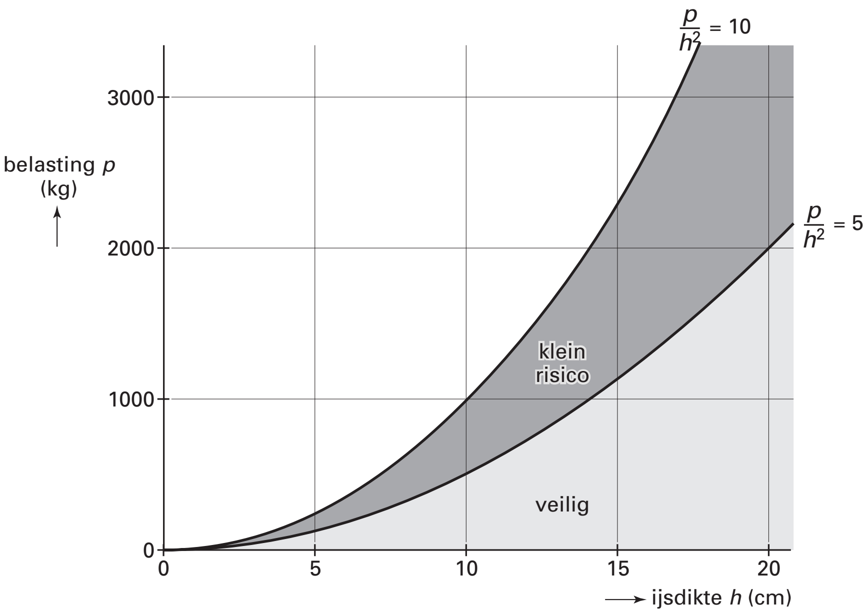
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

IJs

Als er ijs ligt op de Nederlandse binnenwateren, profiteren velen van de gelegenheid om te schaatsen.

De grafieken in de figuur hieronder laten zien bij welke belasting ijs 'veilig' is en welke belasting een 'klein risico' met zich meebrengt.
Op de horizontale as is de dikte h van het ijs in cm uitgezet en op de verticale as de belasting p in kg.
Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Uit deze figuur is bijvoorbeeld af te lezen dat ijs van 15 cm dik 'veilig' een belasting tot 1125 kg kan dragen en dat bij een belasting van 1125 tot 2250 kg er sprake is van een 'klein risico'.

Bij de grafiek op de grens van 'veilig' en 'klein risico' hoort de formule $\frac{p}{h^2} = 5$.

Voor een evenement moet het ijs 'veilig' belast kunnen worden met 5000 kg.

4p **1** ☐ Bereken de minimale dikte van het ijs. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.

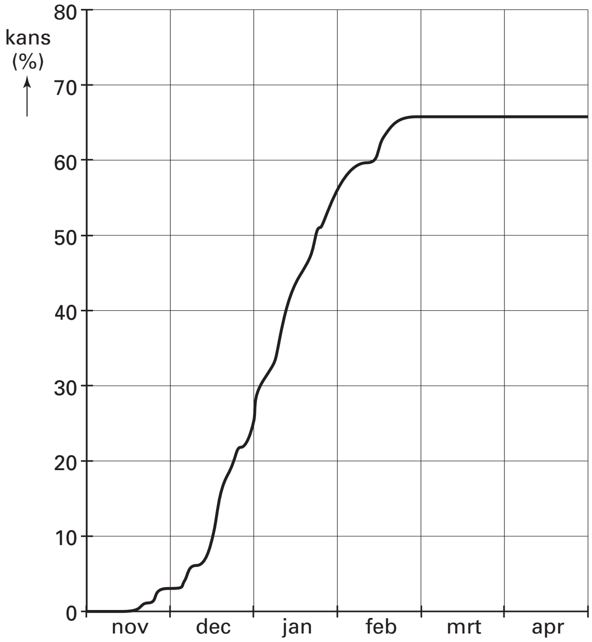
De formule voor de grafiek op de grens tussen 'klein risico' en 'groot risico' is $\frac{p}{h^2} = 10$.

Bij de grafiek die de grens aangeeft tussen 'groot risico' en 'absoluut onveilig' hoort de formule $\frac{p}{h^2} = 25$.

3p **2** ☐ Arceer in de figuur op de uitwerkbijlage het gebied 'groot risico'.

Op basis van waarnemingen van de afgelopen 100 jaar heeft men de kans bepaald dat er vóór een bepaalde datum ijs voorkomt met een dikte van 7 cm of meer. In onderstaande figuur is deze kans voor elke datum af te lezen.

figuur 2



Uit deze figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat de kans dat er in een periode van november tot en met april al vóór 1 januari ijs zal zijn met een dikte van 7 cm of meer, gelijk is aan 25%. We gaan ervan uit dat de in deze figuur getekende grafiek voor de komende perioden november-april blijft gelden.

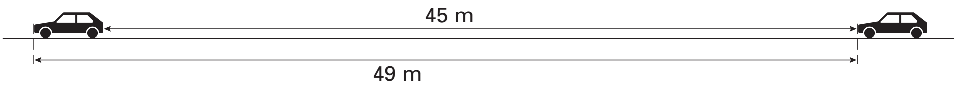
4p **3** ☐ Bereken de kans dat twee van de komende vier perioden november-april vóór 1 februari ijs hebben met een dikte van 7 cm of meer.

3p **4** ☐ Bereken met behulp van de figuur in hoeveel procent van de komende perioden november-april er naar verwachting geen ijs voorkomt met een dikte van 7 cm of meer.

Verkeersdichtheid

We gaan uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur 3).
Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig.

figuur 3



Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: "Houd 2 seconden afstand".

3p **5** ☐ Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

3p **6** ☐ Bereken in de gegeven situatie het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert.

De volgende vragen gaan over wegen met veel verkeer.
Als het drukker wordt op de weg, gaan de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar.
De *verkeersdichtheid*, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.
Voor het verband tussen de snelheid van het verkeer en de verkeersdichtheid stelde de Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields in 1935 de volgende formule op:

$$k = k_{max} \cdot (1 - \frac{v}{v_{max}})$$

Hierbij is
- v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur,
- v_{max} de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt,
- k de verkeersdichtheid en
- k_{max} het maximale aantal auto's per kilometer weg.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert.
Voor q geldt: $q = v \cdot k$.

We gaan uit van de volgende situatie.
Op een weg is v_{max} gelijk aan 88. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is k_{max} gelijk aan 250.

3p **7** ☐ Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vragen gaan over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is k_{max} gelijk aan 250 en v_{max} gelijk aan 160.

Met behulp van de gegeven formules $k = k_{max} \cdot (1 - \frac{v}{v_{max}})$ en $q = v \cdot k$ kan afgeleid worden dat voor elke rijstrook van deze weg geldt: $q = 250v - 1{,}5625v^2$.

De doorstroming q van een rijstrook hangt dus af van de snelheid waarmee gereden wordt.

3p **8** ☐ Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid q het grootst is.

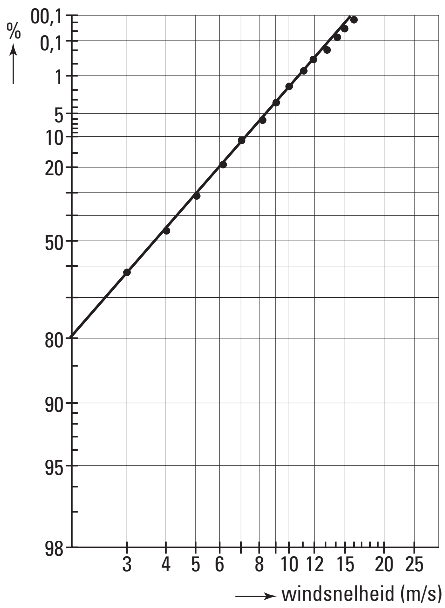
Tijdens de spits willen per uur in één richting 18 000 automobilisten via de beide rijstroken van de snelweg een bepaald punt passeren. Zij willen daarbij een snelheid van 100 km/uur aanhouden en niet dichter op elkaar rijden dan de verkeersveiligheid toelaat.

3p **9** ☐ Onderzoek of dit mogelijk is.

Windsnelheid en kansen

Bij het K.N.M.I. in De Bilt is over een reeks van jaren de windsnelheid gemeten. In de figuur hiernaast zijn deze gegevens voor de periode 1961 - 1980 op speciaal grafiekenpapier verwerkt.
Uit de grafiek is af te lezen dat bij 20% van de waarnemingen de windsnelheid 6 m/s of meer is. Op grond hiervan nemen we aan dat de kans op een windsnelheid van 6 m/s of meer 20% is. Op dezelfde manier lezen we ook voor andere windsnelheden kansen af uit de grafiek.
Neem aan dat de gegevens in de grafiek overal in Nederland gelden.

figuur 4



Iemand gaat drie zaterdagen achter elkaar zeilen ergens in Nederland.

3p **10** ☐ Bereken de kans dat op twee van deze drie zaterdagen de windsnelheid 6 m/s of meer is.

3p **11** ☐ Bereken met behulp van de figuur de kans dat op een dag de windsnelheid tussen 3 en 10 m/s is.

Het zeilseizoen telt 26 zaterdagen.

4p **12** ☐ Bereken de kans dat van deze 26 zaterdagen er hoogstens 4 zaterdagen zijn met een windsnelheid van 7 m/s of meer.

Een bijzonder windverschijnsel is een tornado. Tornado's zijn in Nederland vrij zeldzaam. Bij het K.N.M.I. komen meldingen binnen van waargenomen tornado's.
Het aantal tornado's dat in het kustgebied van Nederland per periode van 25 jaar waargenomen wordt, blijkt tot nu toe bij benadering normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 13,1 tornado's en een standaardafwijking van 4,5 tornado's. Neem aan dat dit ook in de toekomst geldig blijft.

foto 1

3p **13** ☐ Bereken de kans dat in de komende 25 jaar in het kustgebied van Nederland minstens 20 tornado's worden waargenomen.

Windsnelheid en hoogte

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel 1). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

tabel 1

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

4p **14** ☐ Bereken a en b met behulp van de gegevens in tabel 1.
Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:
- W de windsnelheid (in m/s);
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten;
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen;
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.

In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s.

5p **15** ☐ Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende:
de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

4p **16** ☐ Bereken de waarde van r van dit terrein.

Meerlingen

Men spreekt van een meerling als er bij een geboorte meer dan één baby ter wereld komt.

Al voor de geboorte van een bepaalde meerling is bij de ouders bekend dat deze bestaat uit drie jongens en twee meisjes. Het wordt dus een vijfling.
Als alleen gekeken wordt naar het geslacht van de baby's is een mogelijke volgorde van geboren worden: jongen-meisje-jongen-meisje-jongen. Er zijn meer volgordes mogelijk.

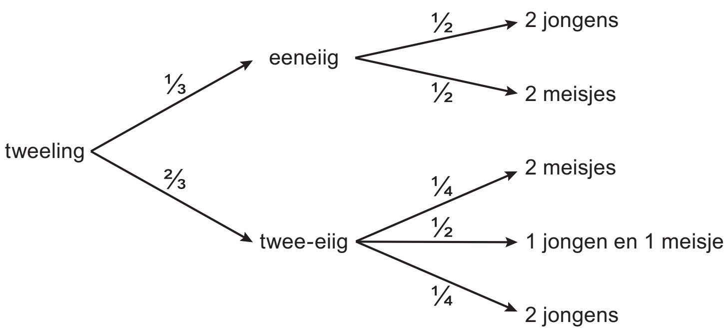
3p **17** ☐ Bereken het totaal aantal mogelijke volgordes van geboren worden.

In 1997 waren er in totaal 186701 bevallingen in Nederland waarvan 3328 bevallingen met meerlingen. Daarmee was het aantal bevallingen met meerlingen 1,783% van het totaal aantal bevallingen in Nederland.
Op grond van deze cijfers veronderstellen we dat in alle jaren daarna de kans op een bevalling van een meerling gelijk is aan 0,01783.

3p **18** ☐ Bereken de kans dat er bij 900 bevallingen 16 of meer bevallingen van een meerling zijn.

Bij tweelingen is er sprake van eeneiige of twee-eiige tweelingen. Een eeneiige tweeling kan alleen maar uit twee jongens of twee meisjes bestaan. Bij een twee-eiige tweeling is het geslacht van ieder van de kinderen onafhankelijk van dat van het andere kind. Een twee-eiige tweeling kan dus ook bestaan uit één jongen en één meisje.
Hieronder is de kansboom getekend bij de samenstelling van een tweeling.

figuur 5



Er zijn drie samenstellingen van een tweeling mogelijk: een jongen en een meisje, twee jongens of twee meisjes.

4p **19** ☐ Toon aan dat deze drie mogelijke samenstellingen van tweelingen gemiddeld even vaak voorkomen.

De zwangerschap van een tweeling duurt gemiddeld bijna 4 weken korter dan de zwangerschap van één kind. Een zwangerschap van een tweeling duurt gemiddeld 36,2 weken ofwel ongeveer 253 dagen. Neem aan dat de zwangerschapsduur van een tweeling normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 12 dagen.

Als de zwangerschap van een tweeling minder dan 38 weken duurt dan noemt men de baby's prematuur.

4p **20** ☐ Bereken het percentage tweelingen dat prematuur geboren wordt.

De zwangerschapsduur van een moeder bij één kind is gemiddeld 40 weken. Neem aan dat deze zwangerschapsduur normaal verdeeld is met een gemiddelde van 280 dagen. Verder is bekend dat 82% van alle bevallingen plaatsvindt in de periode vanaf dag 266 tot dag 294.

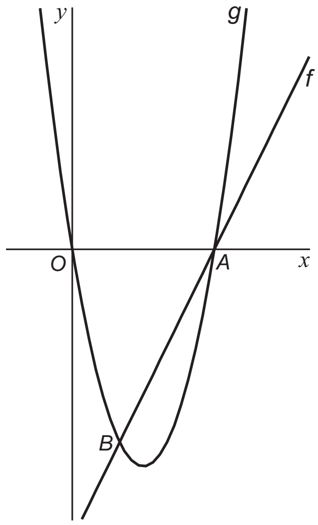
4p **21** ☐ Toon met een berekening aan dat de standaardafwijking van deze normale verdeling kleiner is dan 12 dagen.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Lijn en parabool

Hiernaast zijn in een assenstelsel een lijn en een parabool getekend.
De lijn is de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 12$.
De parabool is de grafiek van de functie $g(x) = x^2 - 6x$.

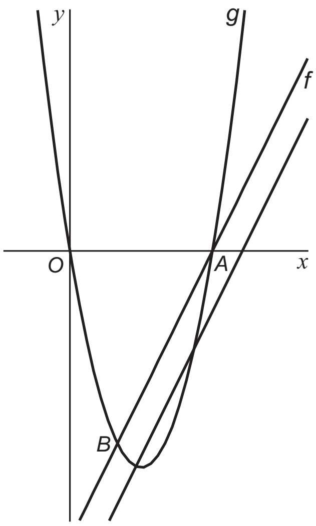
figuur 6



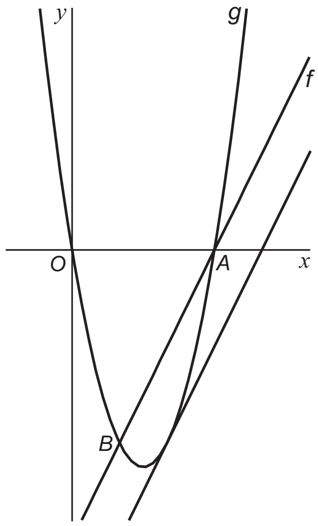
De lijn en de parabool snijden elkaar in de punten A en B.

5p **22** ☐ Bereken de lengte van het lijnstuk AB.

figuur 7



figuur 8



Door de grafiek van f omlaag te schuiven ontstaat een situatie, waarbij de lijn twee andere snijpunten dan A en B met de parabool heeft (zie figuur 7). Wanneer de lijn verder omlaag schuift, zal deze op een gegeven moment nog maar één punt met de parabool gemeenschappelijk hebben (zie figuur 8). In die situatie is deze lijn een raaklijn aan de parabool.

5p **23** ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van deze raaklijn op.

Einde