Examen HAVO
2007

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B1

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

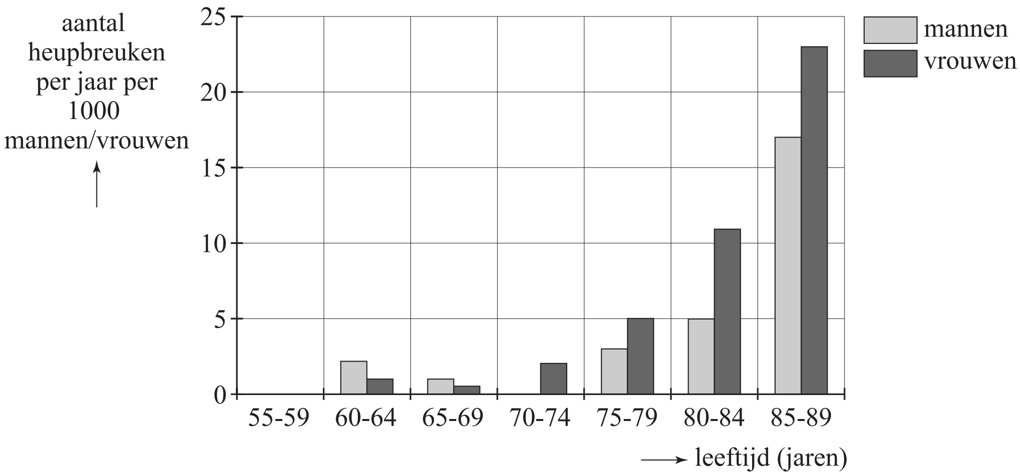
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Broze botten

Oudere mensen kunnen last krijgen van allerlei ouderdomskwalen, onder andere van broze botten. Mensen met broze botten hebben een grotere kans dat ze een bot breken.

In figuur 1 is een staafdiagram getekend van het aantal heupbreuken per jaar, zowel per 1000 mannen als per 1000 vrouwen voor verschillende leeftijdsklassen.

figuur 1



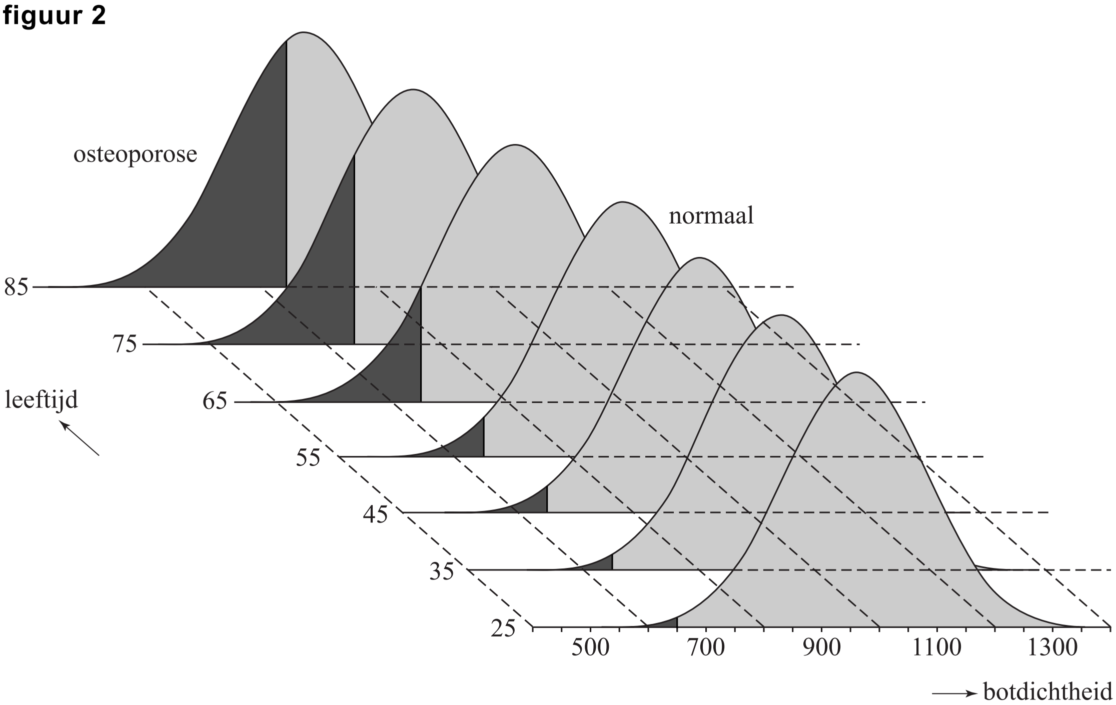
Uit figuur 1 blijkt dat bij vrouwen in de leeftijdsklasse 85-89 vaker een heupbreuk voorkomt dan bij mannen in diezelfde leeftijdsklasse.

3p **1** Bereken hoeveel keer zo vaak dit bij vrouwen voorkomt als bij mannen in de leeftijdsklasse 85-89.

De botmineraaldichtheid, vaak kortweg aangeduid met botdichtheid, is een maat voor de sterkte van het bot. De botdichtheid wordt uitgedrukt in een getal, waarbij geldt dat hoe groter dit getal is, hoe sterker de botten zijn. De botdichtheid van de heup bij vrouwen van 35 jaar blijkt bij benadering normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 950 en een standaardafwijking van 120.

Ook bij andere leeftijden is de botdichtheid van de heup bij vrouwen normaal verdeeld. In figuur 2 is de kansverdeling van de botdichtheid voor een aantal leeftijden weergegeven.

figuur 2



In onderstaande tabel is te zien hoe de gemiddelde botdichtheid van vrouwen afneemt wanneer zij ouder worden.

tabel

leeftijd l	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**
gemiddelde botdichtheid GB	960	950	940	900	800	750	700

Vanaf de leeftijd van 60 jaar is er een lineair verband tussen de gemiddelde botdichtheid en de leeftijd.
Dit lineaire verband kan worden weergegeven door de formule: $GB = a \cdot l + b$.
Hierin is GB de gemiddelde botdichtheid van vrouwen en l is de leeftijd in jaren.

4p **2** Bereken a en b.

Er is sprake van osteoporose bij een botdichtheid die kleiner is dan 650. Uit figuur 2 blijkt dat hoe hoger de leeftijd van de vrouwen, hoe groter het percentage met osteoporose. We gaan er hier van uit dat de normale verdelingen in figuur 2 allemaal een standaardafwijking hebben van 120.

6p **3** Bereken op welke leeftijd 30% van de vrouwen lijdt aan osteoporose.

Er wordt een voorlichtingsprogramma gestart voor vrouwen van 55 jaar met osteoporose. Om praktische redenen kunnen niet alle vrouwen van 55 jaar met osteoporose meedoen. Er wordt voor gekozen om de helft van deze vrouwen, namelijk die met de meest ernstige vorm van osteoporose, in het programma te betrekken. Als de botdichtheid van een vrouw kleiner is dan een bepaalde waarde G, doet zij mee aan het voorlichtingsprogramma. De waarde van G is zo gekozen dat 50% van de 55-jarige vrouwen met osteoporose meedoet.

5p **4** Bereken de waarde van G.

Hoogtetraining

Het was eind vorige eeuw onder topsporters erg populair om enkele weken op grote hoogte te trainen. Vanwege de ijlere lucht worden in een dergelijke trainingssituatie door het lichaam extra rode bloedlichaampjes aangemaakt. De rode bloedlichaampjes zorgen voor het transport van zuurstof in het lichaam. Hoe meer rode bloedlichaampjes aanwezig in het lichaam, hoe beter er gepresteerd zou kunnen worden omdat bij het leveren van zware prestaties veel zuurstof nodig is in de spieren. Inmiddels heeft men ontdekt dat er ook nadelige effecten optreden zodat het netto effect voor de sporter nihil lijkt.

Wanneer de hoogte toeneemt, neemt de luchtdruk af. Deze afname van de luchtdruk verloopt exponentieel. De luchtdruk kan worden gemeten in mm Hg (Hg staat voor kwik).

Op een gegeven moment is op een bepaalde plaats de luchtdruk op zeeniveau (hoogte = 0) gelijk aan 760 mm Hg en op één kilometer hoogte is deze gelijk aan 648 mm Hg. Volgens het exponentiële model is de luchtdruk op 100 meter hoogte vrijwel gelijk aan 748 mm Hg.

4p **5** Toon dit door middel van een berekening aan.

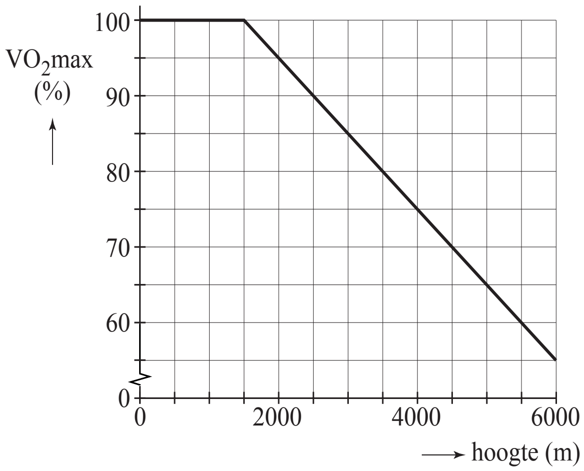
Een andere eenheid om de luchtdruk te meten is hectopascal (hPa).
Er geldt bij benadering dat 1 mm Hg = $\frac{4}{3}$ hPa.
Voor kleine hoogtes, tot ongeveer 100 meter, gebruikt men de volgende vuistregel:
De daling van de luchtdruk bedraagt 1 hPa per 8 meter toename van de hoogte.

4p **6** Bereken in bovengenoemde situatie het verschil tussen de luchtdruk op 100 meter hoogte, berekend volgens de vuistregel, en de waarde volgens het exponentiële model in mm Hg.

Door de verminderde luchtdruk bij toenemende hoogte kan er minder zuurstof worden opgenomen in de longen. De maximale hoeveelheid zuurstof die de longen per minuut kunnen opnemen wordt het maximale zuurstofopnamevermogen ($\mathrm{VO_2max}$) genoemd en wordt gemeten in liter per minuut (liter/min).

In figuur 1 is het verband weergegeven tussen deze $\mathrm{VO_2max}$ en de hoogte. Hierbij is de $\mathrm{VO_2max}$ op zeeniveau gelijkgesteld aan 100%. In figuur 1 is te zien dat vanaf een hoogte van 1500 meter de $\mathrm{VO_2max}$ lineair afneemt en wel met 10% per 1000 meter stijging.

figuur 1

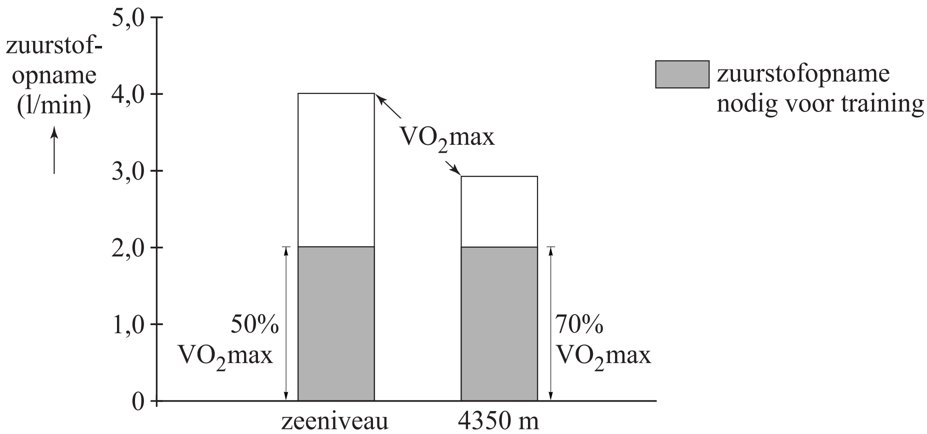


Een wielrenner heeft op zeeniveau een VO_2max van 5,8 liter/min. Hij traint op de wielerbaan van Mexico City op een hoogte van 2278 meter.

4p **7** Bereken het maximale zuurstofopnamevermogen in Mexico City van deze wielrenner in liter per minuut. Geef je antwoord in 1 decimaal nauwkeurig.

Een illustratie van het feit dat een sporter op grote hoogte sneller uitgeput raakt is te zien in figuur 2.

figuur 2



In de figuur is te zien dat een wielrenner voor een bepaalde training 2,0 liter/min nodig heeft. Op zeeniveau heeft de wielrenner 50% van zijn VO_2max nodig voor deze training. Op een hoogte van 4350 m heeft hij voor diezelfde training 70% van zijn VO_2max nodig. Op deze hoogte raakt hij daardoor sneller uitgeput.

De training zoals hierboven beschreven, wordt door dezelfde wielrenner uitgevoerd op een hoogte van 3000 meter. Met behulp van zijn VO_2max op deze hoogte kan berekend worden hoeveel procent hiervan nodig is voor deze training.

3p **8** Bereken dit percentage.

Een atleet wil een bepaald trainingsschema volgen. De hoogte waarop hij gaat trainen is nog niet vastgesteld. Het verband tussen de hoogte en het percentage van zijn VO_2max dat hij nodig heeft voor dit trainingsschema wordt gegeven door de formule:

$$P = \frac{6000}{115 - 0{,}01h}$$

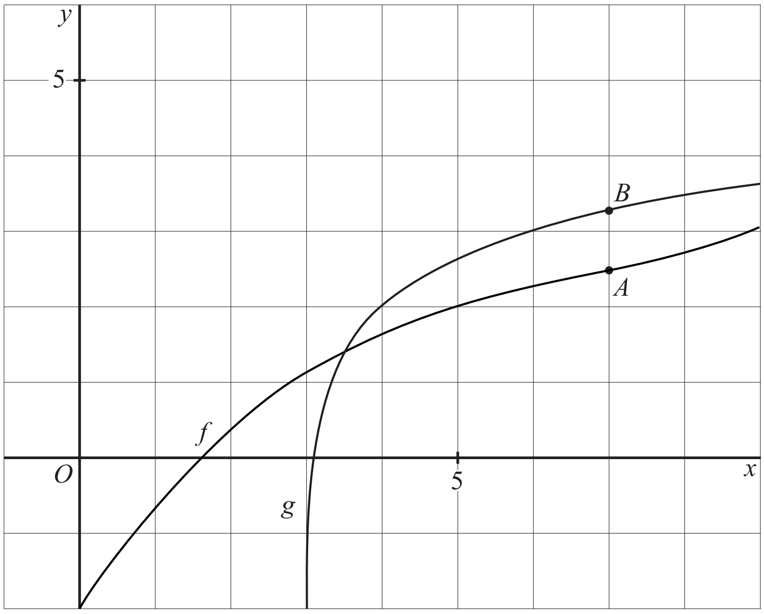
Hierin is h de hoogte in meter met $h \geq 1500$ en P het percentage van de VO_2max van de atleet op hoogte h dat nodig is voor het trainingsschema.

5p **9** Bereken op algebraïsche wijze op welke hoogte het percentage P gelijk is aan 80%.

Derdemacht en logaritme

In onderstaande figuur zie je twee grafieken getekend.
Het functievoorschrift van f is $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 1{,}55x - 2$ en het functievoorschrift van g is $g(x) = 2 + {}^3\log(x-3)$.

figuur



3p **10** Bereken exact de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van g met de x-as.

A is een punt op de grafiek van f en B is een punt op de grafiek van g. De x-coördinaat van zowel A als B is 7. Zie de figuur.
De raaklijn aan de grafiek van f in punt A en de raaklijn aan de grafiek van g in punt B lopen vrijwel parallel. Dit betekent dat de helling van de grafiek van f in punt A bijna gelijk is aan de helling van de grafiek van g in punt B.

3p **11** Bereken de exacte waarde van de helling van de grafiek van f in A met behulp van differentiëren.

De helling van de grafiek van g in punt B kan benaderd worden met een differentiequotiënt op een voldoende klein interval.

3p **12** Bereken op deze manier de helling van de grafiek van g in punt B. Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Biggen

Het spel ‘Biggen’ wordt gespeeld met twee ‘dobbelstenen’ in de vorm van kleine plastic varkentjes. De spelers werpen met deze dobbelstenen, biggen genaamd. Hoeveel punten een speler krijgt, hangt af van hoe deze biggen terecht komen. Doel van het spel is zo veel mogelijk punten te scoren. Wie het eerst 100 punten of meer heeft, wint.

Een big kan op zes verschillende manieren terecht komen: op zijn linkerzij, op zijn rechterzij, rechtop op zijn poten, op zijn rug, op zijn snuit of op zijn wang. (Zie de foto’s.) De big is niet volledig symmetrisch. Zo is de kans dat de big op zijn linkerzij terecht komt niet gelijk aan de kans dat hij op zijn rechterzij terecht komt. Bovendien kan de big niet op zijn rechterwang blijven liggen, maar wel op zijn linkerwang. Daarom duiden we deze situatie simpelweg aan met wang.






In tabel 1 zijn de kansen voor de verschillende worpen met één big en de punten die daarbij horen gegeven.

tabel 1

big valt op	**linkerzij**	**rechterzij**	**poten**	**rug**	**snuit**	**wang**
kans	0,29	0,35	0,08	0,23	0,04	0,01
punten	0	0	5	5	10	15

Uit tabel 1 blijkt dat bij 50 worpen met één big de big naar verwachting vier keer ($50 \times 0{,}08$) op zijn poten terecht komt. In de praktijk is het natuurlijk wel mogelijk dat de big acht keer of vaker op zijn poten terecht komt.

3p **13** Bereken de kans dat een big bij 50 worpen acht keer of vaker op zijn poten terecht komt.

Bij een worp met twee biggen worden de punten van de twee biggen opgeteld. Dit geldt echter niet wanneer bij een worp beide biggen op exact dezelfde manier terecht zijn gekomen. Dan krijg je namelijk meer punten. Zie tabel 2.

tabel 2

beide biggen vallen op	**linkerzij**	**rechterzij**	**poten**	**rug**	**snuit**	**wang**
punten	1	1	20	20	40	60

Het is mogelijk dat iemand in twee worpen, dus door twee keer met beide biggen te gooien, 80 punten haalt. Een manier is bijvoorbeeld als bij de eerste worp de twee biggen allebei op hun wang terecht komen en bij de tweede worp één big op zijn rug en één big op zijn wang terecht komt. Je mag ervan uitgaan dat de twee biggen identiek zijn, dus een worp met wang-rug is hetzelfde als rug-wang. In dat geval zijn er in totaal 9 verschillende manieren om in twee worpen 80 punten te halen.

5p **14** Schrijf deze manieren op.

Zolang een speler doorgaat met gooien, worden de punten van zijn worpen bij elkaar opgeteld. Als hij vrijwillig stopt, worden zijn punten genoteerd en is de volgende speler aan de beurt.
Het doorgaan met gooien heeft echter ook een risico: als bij een worp één big op zijn linkerzij valt én de andere big op zijn rechterzij, moet de speler stoppen en is hij alle punten van deze beurt kwijt. De kans dat dit gebeurt, is afgerond op 2 decimalen 0,20.

3p **15** Toon dit met een berekening aan.

3p **16** Bereken de kans dat een speler drie keer achter elkaar kan gooien **zonder** dat hij zijn punten kwijt raakt.

Twee spelers spelen het spel. Op een gegeven moment heeft een van de spelers 98 punten. Hij is aan de beurt. Hij wil graag weten hoe groot de kans is dat hij het spel zal winnen in deze beurt. Je mag er daarbij van uitgaan dat zodra de speler 100 punten of meer heeft gehaald, hij zal stoppen met gooien omdat hij dan al heeft gewonnen. Je mag er ook van uitgaan dat wanneer de speler in zijn eerste worp 1 punt haalt, hij zal doorgaan met gooien.

6p **17** Bereken de kans dat deze speler in deze beurt het spel wint.

Dijkverhoging

Nederland heeft regelmatig te kampen met hoge waterstanden in de rivieren waarbij soms overstromingen optreden zoals in 1994 en 1995. Rijkswaterstaat heeft na deze overstromingen onderzocht of er langs de grote rivieren in Zuid-Holland een dijkverhoging nodig was.

Bij de bepaling van een veilige dijkhoogte spelen kansen een grote rol. Rijkswaterstaat stelt als veiligheidsnorm voor rivierdijken een dijkhoogte waarbij hoogstens 1 keer per 4000 jaar een overstroming wordt verwacht.

Neem bij de beantwoording van de volgende drie vragen aan dat de rivierdijken in Nederland precies aan de hierboven gestelde norm voldoen, dus een hoogte hebben waarbij de kans op een overstroming in een jaar gelijk is aan $\frac{1}{4000}$.

Het is erg onwaarschijnlijk dat in twee opeenvolgende jaren overstromingen optreden. Toch gebeurde dat in 1994 en 1995.

3p **18** Bereken de kans dat in twee opeenvolgende jaren overstromingen optreden.

De kans dat er in een periode van 100 jaar géén overstroming optreedt, is redelijk groot.

3p **19** Bereken deze kans. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

3p **20** Bereken de kans dat in een periode van 100 jaar er precies twee jaren zijn met overstromingen. Geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

De dijkhoogtes laat men niet alleen afhangen van de kans op een overstroming maar ook van de benodigde investeringskosten. Hoe hoger de dijk, hoe kleiner de kans op een overstroming maar hoe hoger de kosten. Vanwege de hoge kosten is men gedwongen om een bepaald risico te accepteren.
Voor de waterstanden in de grote rivieren in Zuid-Holland hanteert men de volgende formule:

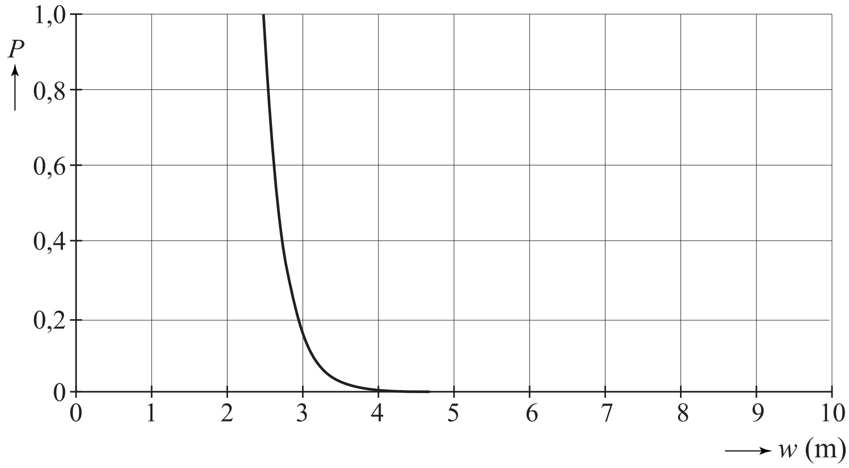
$$P = 10^{3,95-1,58w}$$

Hierin is P de kans dat in een jaar tijd het water minimaal de hoogte w bereikt. De hoogte w wordt uitgedrukt in meter boven NAP. Om aan de norm te voldoen, zal de gewenste dijkhoogte dus minstens gelijk moeten zijn aan de hoogte w. Het model kan alleen gebruikt worden als $w \geq 2,5$.

4p **21** Bereken op algebraïsche wijze hoe hoog de rivierdijken moeten zijn om precies aan de norm, 1 overstroming per 4000 jaar, te voldoen. Rond je antwoord af op hele cm.

In onderstaande figuur is de grafiek van $P = 10^{3,95-1,58w}$ te zien.

figuur



Deze grafiek is zeker bij grote waterhoogtes (bijvoorbeeld vanaf 4 m) niet handig in het gebruik. Om deze reden bekijkt men liever de grafiek die het verband weergeeft tussen $\log P$ en w. Het verband tussen $\log P$ en w is lineair.

6p **22** Leid uit bovenstaande formule voor P de formule af die het lineaire verband beschrijft tussen $\log P$ en w **en** teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek die dit verband weergeeft voor $w \geq 2,5$.