Examen HAVO

2009

tijdvak 1
dinsdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

oud programma **wiskunde B1**

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

923-0151-a-HA-1-o

Vetpercentage

Al heel lang onderzoekt men het verband tussen enerzijds het gewicht en de lengte van volwassen mensen en anderzijds hun gezondheid. Hierbij gebruikt men vaak de Body Mass Index (BMI). De BMI wordt als volgt berekend:

$$BMI = \frac{G}{L^2} \text{ met } 1,50 \leq L \leq 2,20$$

Hierin is G het gewicht in kilogram en L de lengte in meter.
In tabel 1 zie je hoe bij volwassenen een diagnose wordt gesteld op basis van de BMI.

tabel 1

BMI	**diagnose**
minder dan 18,5	ondergewicht
vanaf 18,5 tot 25,0	normaal gewicht
vanaf 25,0 tot 30,0	matig overgewicht
vanaf 30,0	ernstig overgewicht

Iemand heeft een lengte van 1,90 m en een gewicht van 100 kg. Zijn BMI is 27,7 en daarom wordt de diagnose ‘matig overgewicht’ gesteld.

3p **1** Bereken hoeveel het gewicht van deze persoon minimaal moet dalen om volgens de BMI een ‘normaal gewicht’ te krijgen. Rond je antwoord af op hele kilogrammen.

Voedingsdeskundigen zijn geïnteresseerd in het ideale gewicht van een persoon. Dit ideale gewicht kan op verschillende manieren worden berekend. Als met de BMI-formule wordt gewerkt, gaat men ervan uit dat een BMI van 22,0 overeenkomt met het ideale gewicht.

Een andere manier om het ideale gewicht te bepalen, is door gebruik te maken van de volgende vuistregel:
Het ideale gewicht is 100 keer de lengte in meter verminderd met 110.

Bij een bepaalde lengte is het ideale gewicht volgens beide manieren van berekenen gelijk.

6p **2** Bereken op algebraïsche wijze bij welke lengte dit het geval is. Rond daarna je antwoord af op hele centimeters.

Een hoog vetpercentage levert meer gezondheidsrisico’s op dan een laag vetpercentage. Het vetpercentage is het gewicht van het vetweefsel gedeeld door het totale lichaamsgewicht, maal 100. Om het vetpercentage te bepalen gebruikt men de zogenaamde formule van Siri, die geldt onder voorwaarden waaraan voor de meeste mensen voldaan is. Deze formule luidt als volgt:

$$VP = (\frac{1}{d} \cdot 4,95 - 4,50) \cdot 100 \text{ met } 0,90 \leq d \leq 1,10$$

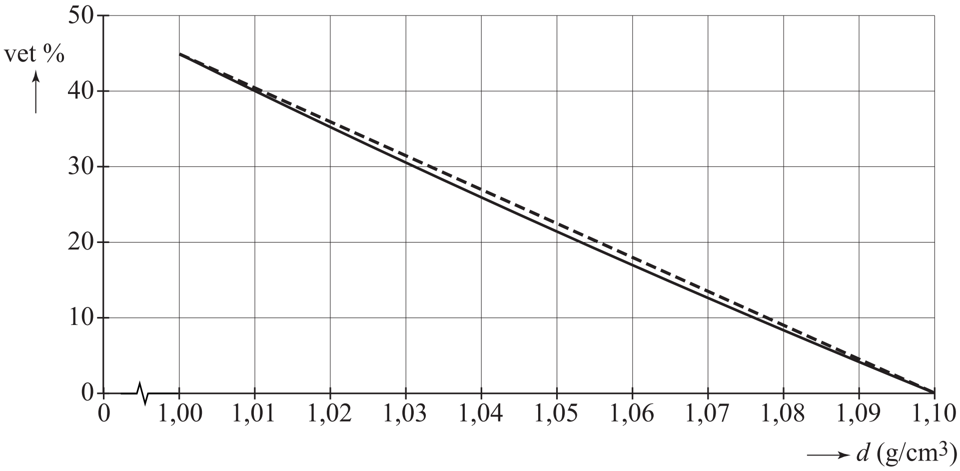
Hierin is VP het vetpercentage en d de dichtheid van het lichaam in g/cm³.

Voor mannen van 20 tot 30 jaar wordt een vetpercentage van 12% als streefwaarde aangehouden.

3p **3** Bereken met behulp van de gegeven formule de dichtheid van het lichaam die hoort bij een vetpercentage van 12%. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Veel mensen hebben een vetpercentage tussen 0 en 45 procent. De dichtheden die daarbij horen, liggen tussen 1,00 en 1,10. In figuur 1 is het gedeelte van de grafiek van VP getekend voor $1{,}00 \le d \le 1{,}10$. In deze figuur is te zien dat de grafiek van VP goed benaderd kan worden door een rechte lijn. Deze rechte lijn door de punten (1,00; 45) en (1,10; 0) is gestippeld getekend.

figuur 1



De vergelijking van deze rechte lijn kan worden geschreven als $VL = p \cdot d + q$.
Hierin is VL het vetpercentage volgens de lineaire benadering en d de dichtheid van het lichaam in g/cm³.

4p **4** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q.

Zonjaar

Het jaar 2003 was volgens het KNMI het zonnigste jaar tot dan toe sinds het begin van de metingen in 1901. Alleen de maand mei was in 2003 niet zo zonnig. Gemiddeld heeft de maand mei 204 uren zonneschijn, terwijl er in mei 2003 slechts 192 uren zonneschijn waren.

Ga ervan uit dat het totale aantal uren zonneschijn in de maand mei normaal verdeeld is met een gemiddelde van 204 uur en een standaardafwijking van 51 uur.

3p **5** Bereken de kans dat er in een willekeurige maand mei hoogstens 192 uren zonneschijn gemeten worden.

In tabel 1 zie je de top tien van de zonnigste jaren in De Bilt.

tabel 1

jaar	**zonneschijn (uren)**
2003	2022
1959	1986
1947	1882
1949	1829
1995	1814
1976	1814
1921	1781
1929	1773
1911	1741
1999	1720

Tabel 1 geldt voor de periode van 1901 tot en met 2003. Met behulp van deze tabel kun je schatten dat de kans dat het aantal uren zonneschijn per jaar minstens 1730 bedraagt, ongeveer 8,7% is.

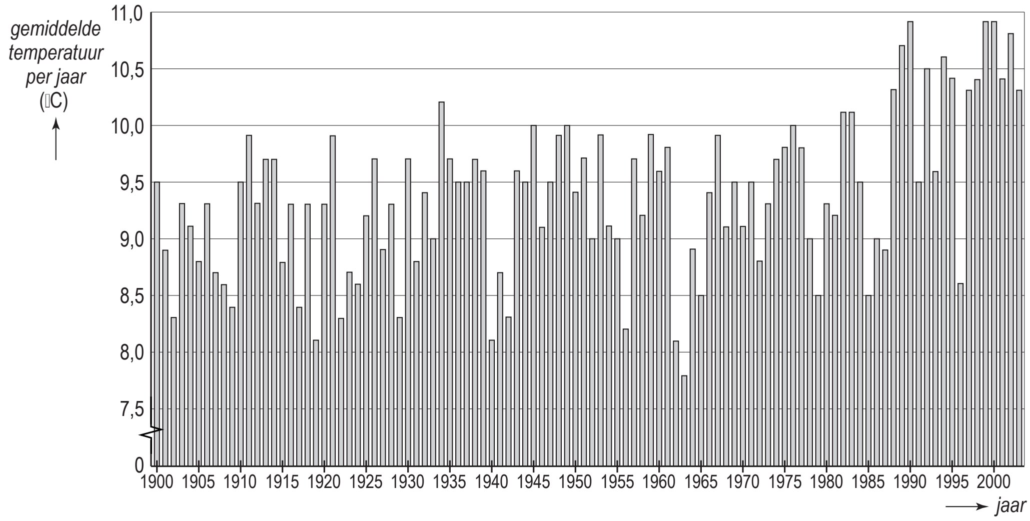
3p **6** Toon dit aan.

Het gemiddelde aantal uren zonneschijn per jaar over de genoemde periode is voor De Bilt gelijk aan 1524. We gaan ervan uit dat het aantal uren zonneschijn per jaar normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1524. Uitgaande van de kans van 8,7% op minstens 1730 uren zonneschijn per jaar is de standaardafwijking van deze normale verdeling te berekenen.

4p **7** Bereken deze standaardafwijking. Rond je antwoord af op hele uren.

Het jaar 2003 was niet alleen erg zonnig, maar ook warm. In figuur 1 zie je de gemiddelde temperatuur per jaar in De Bilt vanaf 1900 tot en met 2003.

figuur 1



Bij de volgende vraag is T de gemiddelde temperatuur in een jaar.
In figuur 1 is te zien dat de waarden van T de laatste jaren behoorlijk hoog zijn: het jaar 2003 is het zevende warme jaar op rij met een gemiddelde temperatuur van 10,3 °C of meer. Velen denken dat dit geen toeval is. Daarvoor is de kans op zeven warme jaren op rij te klein.
Bij de volgende vraag berekenen we hoe klein de kans op zeven warme jaren op rij is in het geval dat er sprake zou zijn van toeval.

Op dit moment gebruikt het KNMI als uitgangspunt de gegevens van de jaren 1971 tot en met 2000. In deze periode was T gemiddeld 9,8 °C met een standaardafwijking van 0,7 °C. We nemen voor de komende jaren aan dat T bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 9,8 °C en een standaardafwijking van 0,7 °C.

5p **8** Bereken de kans dat dan in elk van de komende zeven jaren de waarde van T 10,3 °C of meer is.

Wielrenners en training

foto 1

Voor wielrenners is het belangrijk om te weten welk vermogen ze bij een bepaalde weerstand bij het fietsen kunnen leveren. Om dit te onderzoeken, wordt een wielrenner in een testruimte op een speciale fiets gezet. Zie foto 1. De weerstand kan handmatig worden ingesteld. De wielrenner probeert vervolgens bij deze weerstand zo veel mogelijk vermogen te leveren. Het blijkt dat het vermogen dat deze wielrenner op deze manier levert, afhangt van de weerstand volgens de volgende formule:

$P_1 = (230 - W) \cdot W$ met $10 \leq W \leq 200$

Hierin is P_1 het vermogen dat deze wielrenner levert en W de weerstand.

3p **9** Bereken op algebraïsche wijze bij welke weerstand het door deze wielrenner geleverde vermogen maximaal is.

Voor een tweede wielrenner geldt voor het verband tussen de weerstand en het vermogen bij hetzelfde onderzoek de volgende formule:

$P_2 = 226W - 0,95W^2$ met $10 \leq W \leq 200$

Hierin is P_2 het door de tweede wielrenner geleverde vermogen.

Bij een bepaalde weerstand is het door beide wielrenners geleverde vermogen gelijk.

6p **10** Bereken op algebraïsche wijze het vermogen dat in dit geval geleverd wordt.

Een belangrijk onderdeel binnen de trainingen is de krachttraining op apparaten, waarbij de zwaarte van de oefening kan worden ingesteld met gewichten. De maximale belasting in kilogram waarmee een atleet een bepaalde oefening nog net één keer kan uitvoeren, noemen we de **1RM-waarde** van die atleet bij die oefening.

foto 2

Meestal wordt bij krachttraining een oefening meerdere malen uitgevoerd. De belasting die daarbij gebruikt wordt, is natuurlijk minder dan de 1RM-waarde. Er bestaat een formule die het verband beschrijft tussen het aantal keer A dat de oefening uitgevoerd wordt en het percentage x van de 1-RM waarde. Deze formule luidt:

$$x = 115 - \sqrt{200A + 25}$$

Een atleet heeft kortgeleden vastgesteld dat hij bij een bepaalde oefening een gewicht van 140 kg nog net één maal omhoog kan krijgen. Voor deze atleet geldt dus dat de 1RM-waarde bij deze oefening 140 kg is. Hij wil trainen met series waarin de oefening 12 keer uitgevoerd wordt. Omdat het apparaat slechts per 10 kg instelbaar is, zal hij kiezen voor een belasting van 90 kg.

3p **11** Bereken het gewicht waarvoor hij had moeten kiezen als het apparaat tot op de kilogram nauwkeurig instelbaar zou zijn geweest.

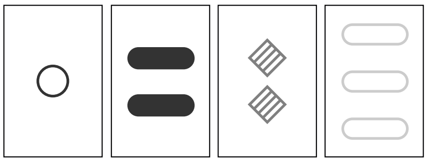
Na verloop van tijd neemt door de training de 1RM-waarde van deze persoon bij deze oefening met 10% toe. Hij blijft echter de oefening met 90 kg uitvoeren.

6p **12** Bereken hoeveel keer deze persoon volgens de formule de oefening moet uitvoeren.

Set

Set is een gezelschapsspel afkomstig uit de Verenigde Staten. Het wordt gespeeld met kaarten. In figuur 1 zijn vier kaarten uit dit spel te zien.

figuur 1



Wat op een kaart te zien is, kan met vier kenmerken worden omschreven. Zie tabel 1.

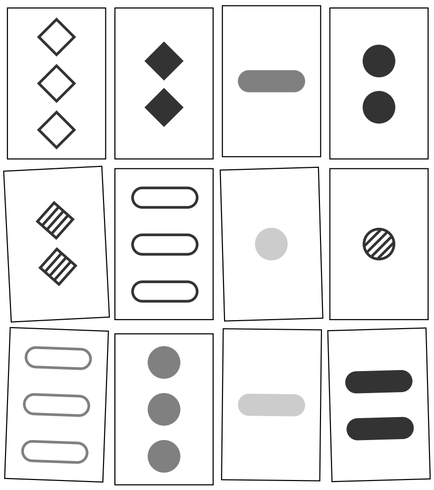
tabel 1

kenmerk	mogelijkheden
vorm	cirkel, ovaal, vierkant
aantal	1, 2, 3
kleur	rood, groen, blauw
vulling van de figuur	open, gearceerd, dicht

In het spel Set komen alle mogelijke kaarten die met deze vier kenmerken gemaakt kunnen worden precies één keer voor. Alle kaarten zijn dus verschillend.
Dit betekent dat er 81 kaarten in het spel zitten.

2p **13** Laat dit met een berekening zien.

figuur 2



Bij het begin van het spel worden willekeurig twaalf kaarten uit het totaal getrokken en op tafel neergelegd. Daarna worden ze in drie rijen van vier kaarten gelegd. Zie figuur 2.

De twaalf kaarten kunnen op verschillende manieren in drie rijen van vier kaarten op tafel gelegd worden.

3p **14** Bereken op hoeveel manieren dit kan.

In elk stadium van het spel is het de bedoeling om te zien of er bij de kaarten die op tafel liggen een bijzonder drietal kaarten is dat een SET vormt.
(Voor de beantwoording van de volgende vragen is het niet van belang, maar voor de volledigheid geven we hier de definitie van een SET: een SET wordt gevormd door een drietal kaarten waarop elk kenmerk óf op alle drie de kaarten hetzelfde is óf op alle drie de kaarten verschillend.)

Het blijkt dat er 1080 verschillende SET's mogelijk zijn bij dit spel.
Iemand trekt willekeurig drie kaarten uit het spel met 81 kaarten.

4p **15** Bereken de kans dat deze drie kaarten een SET vormen. Rond je antwoord af op drie decimalen.

In twaalf kaarten zit vrijwel altijd een SET. Er is aangetoond dat de kans op één of meer SET's in twaalf kaarten gelijk is aan $\frac{33}{34}$.

Het spel wordt 100 keer gespeeld. Bij elk spel wordt er gelet op de beginsituatie met de twaalf kaarten die op tafel liggen.

3p **16** Bereken de kans dat bij deze 100 beginsituaties er minstens 95 keer één of meer SET's aanwezig zijn. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Diergemeenschappen in Afrika

Er is veel onderzoek gedaan naar de samenstelling van grazende diergemeenschappen in de natuurparken van Afrika. Dergelijke grazende diergemeenschappen worden **gilden** genoemd.
Onderzoek heeft zich onder andere gericht op de gewichten van de diersoorten binnen een gilde. Bij dit onderzoek heeft men de soorten binnen een gilde op volgorde gezet van gemiddeld lichaamsgewicht. De lichtste soort heeft men rangnummer 0 gegeven. De lichtste soort noemen we daarom soort 0, de op een na lichtste soort noemen we soort 1, enzovoort. Je kunt nu de gewichten van elkaar opvolgende soorten vergelijken.
Dit vergelijken gebeurt via de zogeheten **gewichtsratio**. Dat is de verhouding tussen het (gemiddelde) gewicht van volwassen dieren van twee elkaar opvolgende soorten. Als bijvoorbeeld soort 7 een gewicht heeft dat 1,8 keer zo groot is als dat van soort 6, dan is de gewichtsratio tussen deze twee soorten gelijk aan 1,8. Uit dergelijk onderzoek is nu gebleken:

Binnen elk gilde is de gewichtsratio tussen twee elkaar opvolgende diersoorten vrijwel constant.

Dit betekent dat in het gilde van het voorbeeld hierboven geldt: soort 1 is 1,8 keer zo zwaar als soort 0, soort 2 is 1,8 keer zo zwaar als soort 1, enzovoort.

Neem aan dat in een ander gilde de gewichtsratio gelijk is aan 1,35 en dat soort 3 een gewicht heeft van 7,8 kg.

3p **17** Bereken het gewicht van de lichtste soort in dit gilde.

Niet alleen binnen een bepaald natuurgebied is er sprake is van een vrijwel constante gewichtsratio, maar dit geldt ook als men alle grazende diersoorten in geheel Afrika als één diergemeenschap beschouwt. Omdat er in totaal dan meer diersoorten zijn, zal de gewichtsratio voor heel Afrika kleiner zijn dan die voor de afzonderlijke gilden. In tabel 1 staan de gewichten van drie diersoorten met daarbij hun rangnummer in de gewichtsvolgorde van soorten in heel Afrika. Bij de volgende vragen wordt ervan uitgegaan dat de gewichtsratio tussen alle elkaar opvolgende soorten constant is.

tabel 1

soort	**rangnummer in gewichtsvolgorde**	**gewicht (kg)**
hartebeest	71	164
steppezebra	81	286
Kaapse buffel	92	631

3p **18** Bereken de gewichtsratio voor heel Afrika met behulp van de gegevens in de tabel voor hartebeest en Kaapse buffel in twee decimalen nauwkeurig.

Voor diersoorten zwaarder dan de Kaapse buffel blijkt de gewichtsratio niet meer constant te zijn. Onderzoekers denken dat dit komt doordat lang geleden veel zware soorten zijn uitgestorven. De zwaarste grazersoort is momenteel de olifant met rangnummer 95 en een gewicht van 3550 kg.

Neem aan dat vroeger de gewichtsratio in Afrika voor alle elkaar opvolgende soorten constant gelijk aan 1,06 is geweest.

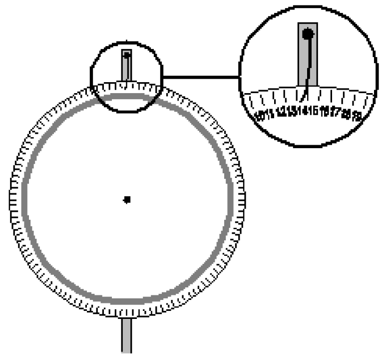
4p **19** Onderzoek hoeveel soorten in de rangschikking tussen de Kaapse buffel en de olifant sindsdien zijn uitgestorven.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Rad van fortuin

In de kantine van een sportvereniging staat een **rad van fortuin**. Dit is een ronde schijf waarop langs de rand de getallen 1 tot en met 120 staan. Deze schijf kan gedraaid worden. Als de schijf tot stilstand gekomen is, wordt één van de 120 getallen door een pijl aangewezen.
Zie figuur 1.
Elk van de 120 getallen heeft een even grote kans om door de pijl aangewezen te worden.

figuur 1



Tijdens een gezellige avond van de sportvereniging wordt met het rad van fortuin een spel gespeeld. Hierbij gelden de volgende regels:

- Voor elke 50 eurocent die een deelnemer betaalt, krijgt hij door een computer aselect een van de getallen 1 tot en met 120 toegewezen.
- De computer kan meerdere keren eenzelfde getal toewijzen.
- Het getal dat door de pijl van het rad van fortuin wordt aangewezen, is het winnende getal. Wie dat getal heeft, wint een prijs.

Jan doet mee. Hij betaalt € 1,50 en krijgt daarvoor drie keer aselect een getal van de computer.
Hij heeft drie verschillende getallen gekregen.

3p **20** Bereken hoeveel mogelijkheden er voor deze drie getallen zijn.

Ada en Brecht betalen elk 50 eurocent en krijgen allebei één getal toegewezen.

3p **21** Bereken exact de kans dat ze allebei het winnende getal hebben.

Aart, Bert en Carmen betalen alle drie 50 eurocent en ze krijgen vervolgens alle drie een getal toegewezen.

4p **22** Bereken de kans dat ze alle drie een ander getal krijgen.