Wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 01

Tijdvak 2
Woensdag 20 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 15 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 3 en 9 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

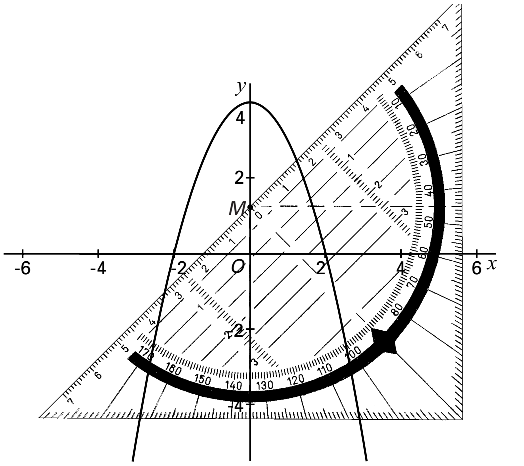
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Verschuivende geodriehoek

In figuur 1 is de parabool $y = 4 - x^2$ getekend. Ook is een geodriehoek getekend met de twee rechthoekszijden evenwijdig aan de x-as en de y-as; de schuine zijde maakt dus steeds een hoek van 45° met de x-as. Het midden M van de schuine zijde ligt op de y-as. De parabool is ook getekend op de bijlage.

figuur 1



Bij elk van de volgende vragen wordt de geodriehoek verschoven in verticale richting; na de verschuiving ligt het punt M dus steeds op de y-as.

Na de eerste verschuiving snijdt de schuine zijde van de geodriehoek de parabool in het punt $P(-3, -5)$ en in nog een punt Q.

6p **1** □ Bereken de lengte van het lijnstuk PQ.

Na de tweede verschuiving is de schuine zijde van de geodriehoek raaklijn aan de parabool.

5p **2** □ Bereken de y-coördinaat van M.

Na de derde verschuiving ligt M op het punt $(0, 2)$. De parabool en de schuine zijde van de geodriehoek sluiten een vlakdeel in.

6p **3** □ Bereken de oppervlakte van dat vlakdeel.

Tennis

In een tennistoernooi wordt bij elke partij gespeeld om de 'best of three', dat wil zeggen dat degene die het eerst twee sets gewonnen heeft, de partij wint. Een partij in dit toernooi duurt dus twee of drie sets.
We werken in deze opgave met het volgende model:
- beide spelers hebben kans 0,5 om de eerste set te winnen;
- de winnaar van de eerste set heeft kans 0,4 om de tweede set te winnen;
- als de partij nog niet beslist is, heeft de winnaar van de tweede set kans 0,4 om de derde set te winnen.

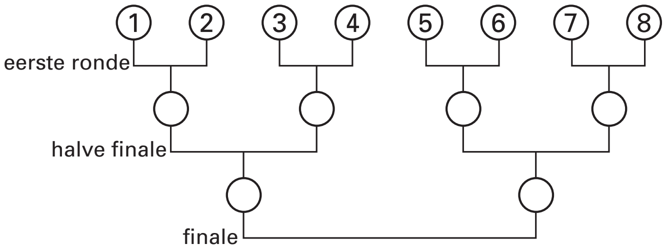
5p **4** □ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal sets dat een partij duurt.

In ons model nemen we aan dat een set 30 minuten duurt. De baan is van 18.30 uur tot 22.00 uur beschikbaar. Op een avond kunnen dus maximaal zeven sets gespeeld worden.

5p **5** □ Bereken de kans dat op een avond drie volledige partijen gespeeld kunnen worden.

Het tennistoernooi wordt met acht deelnemers gespeeld volgens een afvalsysteem. Voor het begin van het toernooi ligt het wedstrijdschema vast.
De deelnemers krijgen een nummer en worden daarmee in het schema geplaatst zoals in figuur 2 is aangegeven. Speler 1 speelt tegen speler 2, de winnaar gaat naar de halve finale en speelt tegen de winnaar van de wedstrijd tussen speler 3 en speler 4.
Het toernooi duurt drie ronden; in de derde ronde wordt de finale gespeeld.

figuur 2



Veronderstel dat de acht deelnemers even sterk zijn en dat de nummers willekeurig worden toegekend.
Wim en Alex doen mee aan het toernooi.

5p **6** □ Bereken de kans dat Wim en Alex elkaar in de halve finale ontmoeten.

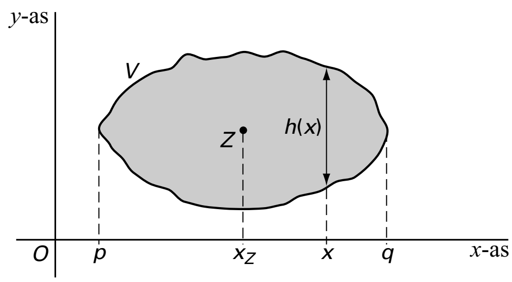
Zwaartepunt

De coördinaten van het zwaartepunt van een vlakdeel kun je met de formule in het kader hieronder berekenen.

Van vlakdeel V is Z het zwaartepunt.
De coördinaten van Z zijn x_Z en y_Z.
Er geldt:

$$x_Z = \frac{1}{\text{oppervlakte van } V} \cdot \int_p^q x \cdot h(x)\,\mathrm{d}x$$

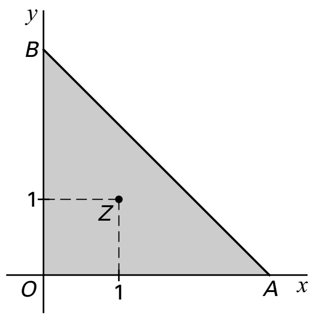
Hierbij is $h(x)$ de bij x behorende hoogte van V, voor $p \leq x \leq q$.
De berekening van y_Z verloopt op een soortgelijke manier.



De vlakdelen in deze opgave zijn symmetrisch in de lijn $y = x$. Dus geldt $y_Z = x_Z$.

De hoekpunten van driehoek OAB zijn $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ en $B(0, 3)$. Zie figuur 3.

figuur 3

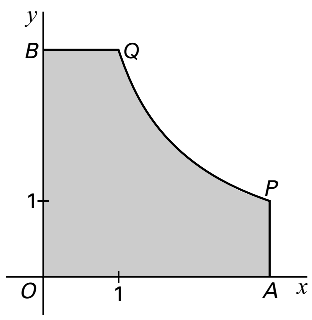


6p **7** □ Toon met de formule in het kader aan dat het zwaartepunt van driehoek OAB het punt $(1, 1)$ is.

Het vlakdeel $OAPQB$ in figuur 4 wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de hyperbool

$$y = \frac{3}{x}.$$

figuur 4



8p **8** □ Bereken exact de x-coördinaat van het zwaartepunt van dit vlakdeel.

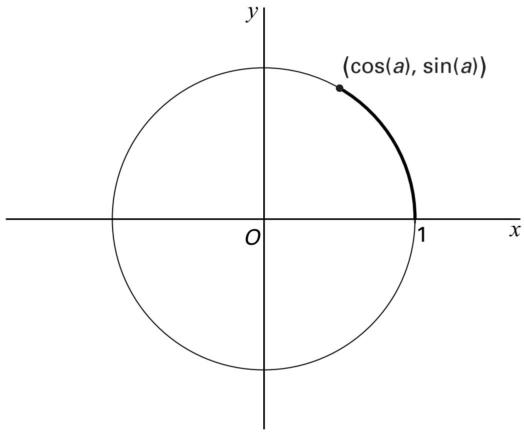
Rechte banen

Een punt P beweegt in een baan die gegeven is door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(a - t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(a - t) + \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le a \le \pi$$

In figuur 5 en op de bijlage is in een assenstelsel de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 getekend. Op de cirkel is voor een waarde van a een boog met lengte a getekend.

figuur 5



6p **9** □ Teken in de figuur op de bijlage de plaats van het punt P op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$. Licht je werkwijze toe.

De beweging van P kan ook beschreven worden door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(\frac{1}{2}a)\ \cos(\frac{1}{2}a - t) \\ y(t) = 2\sin(\frac{1}{2}a)\ \cos(\frac{1}{2}a - t) \end{cases}$$

4p **10** □ Toon dit aan.

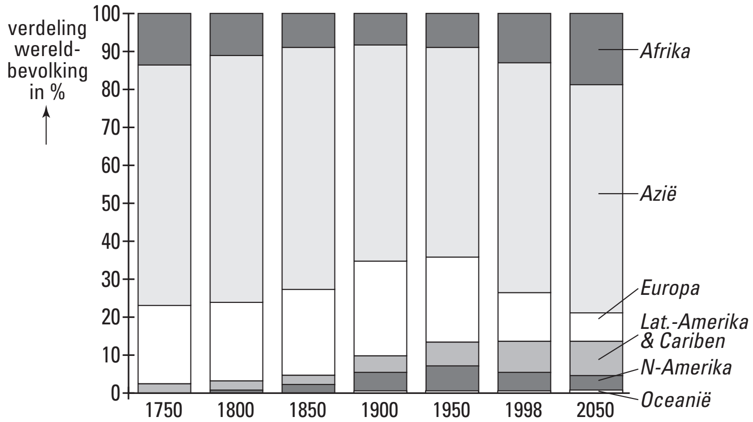
Als je voor enkele waarden van a de baan van P tekent, lijkt deze steeds een deel van een rechte lijn door $(0, 0)$.

5p **11** □ Toon voor $a = 2$ aan dat de baan van P inderdaad een deel van een lijn $y = mx$ is.

Wereldbevolking

Op 12 oktober 1999 werd de zesmiljardste wereldburger geboren. Naar aanleiding hiervan publiceerde de VN het jaarrapport *Six billion – a time for choices.* Hierin wijst de VN Sarajewo aan als plaats waar de zesmiljardste wereldburger geboren werd. Dat is natuurlijk een symbolische daad: waar precies de zesmiljardste wereldburger geboren werd, is helemaal niet bekend. Het zou, gezien de bevolkingsgrootte van Azië, meer voor de hand gelegen hebben de zesmiljardste wereldburger geboren te laten worden in Azië. Zie figuur 6.

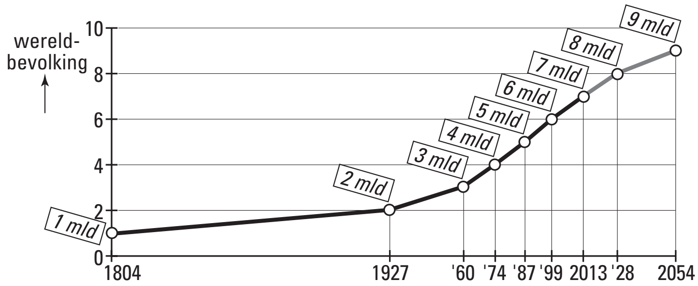
figuur 6



Op basis van figuur 6 nemen we aan dat het aandeel van Azië in de wereldbevolking tussen 1998 en 2050 nagenoeg gelijk blijft.
De zevenmiljardste wereldburger verwacht de VN in 2013 en de achtmiljardste in 2028. Stel dat de VN door loting een continent aanwijst waarin symbolisch de zevenmiljardste wereldburger geboren wordt en dat hierbij voor elk continent de kans om aangewezen te worden gelijk is aan het aandeel van dat continent in de wereldbevolking. En zo ook bij de achtmiljardste wereldburger.

5p **12** □ Bereken met behulp van figuur 6 hoe groot in dat geval de kans is dat de VN voor ten minste één van deze twee geboorten Azië aanwijst.

figuur 7



Figuur 7 komt uit het VN-rapport.
De grootte van de wereldbevolking voldoet bij benadering aan het volgende groeimodel:

$$W(t) = \frac{L}{1 + (L-1) \cdot g^t}$$

Hierbij is:
- W de wereldbevolking in miljarden;
- t het aantal jaren na 1804;
- g een constante met $0 < g < 1$ en
- L de limietwaarde van de wereldbevolking in miljarden, dat is de grenswaarde waar W op den duur naar toe zal groeien.

De groeisnelheid $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ van de wereldbevolking is het grootst als $t = {}^{g}\log\left(\frac{1}{L-1}\right)$.

5p **13** □ Toon aan dat voor die waarde van t geldt: $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4} L \cdot \ln(g)$.

De constante g is gelijk aan 0,983. De wereldbevolking t jaar na 1804 wordt dus gegeven door $W(t) = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot 0{,}983^t}$.

De limietwaarde L is niet precies bekend.

We zijn geïnteresseerd in de kans dat de voorspelde wereldbevolking in 2054, 250 jaar na 1804, groter dan 10,5 miljard is, met andere woorden de kans dat $W(250) > 10{,}5$.

'$W(250) > 10{,}5$' komt overeen met '$L > 12{,}1$'.

5p **14** □ Leg dit uit.

Er zijn veel prognoses gemaakt. Daarin blijken de waarden van L normaal verdeeld te zijn met verwachtingswaarde 10 en standaardafwijking 1,5.

4p **15** □ Bereken onder bovengenoemde aannames in hoeveel procent van de prognoses de voorspelde wereldbevolking in 2054 groter is dan 10,5 miljard.

Einde