wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **04**

Tijdvak 1
Dinsdag 25 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 4 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Machten van een derdegraadsfunctie

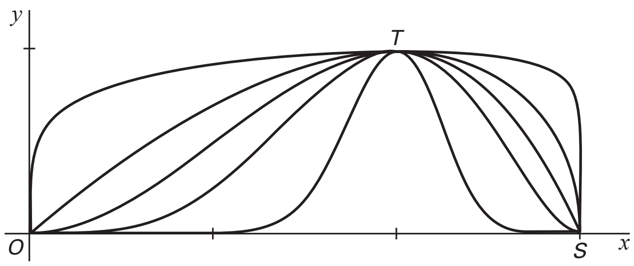
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ op het domein [0, 3].

4p **1** ☐ Toon algebraïsch aan dat het maximum van f gelijk is aan 1.

V is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
5p **2** ☐ Bereken algebraïsch de exacte waarde van de oppervlakte van V.

Op het domein [0, 3] bekijken we de functies $g_p(x) = (f(x))^p = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)^p$, waarbij $p > 0$.
In figuur 1 zijn de grafieken van g_p getekend voor $p = 10$, $p = 2$, $p = 1$, $p = 0{,}5$ en $p = 0{,}1$. Al deze grafieken gaan door de punten $O(0, 0)$, $T(2, 1)$ en $S(3, 0)$.

figuur 1



Voor *elke* positieve waarde van p gaat de grafiek van g_p door O, T en S.
3p **3** ☐ Toon dat aan.

Grondprijs

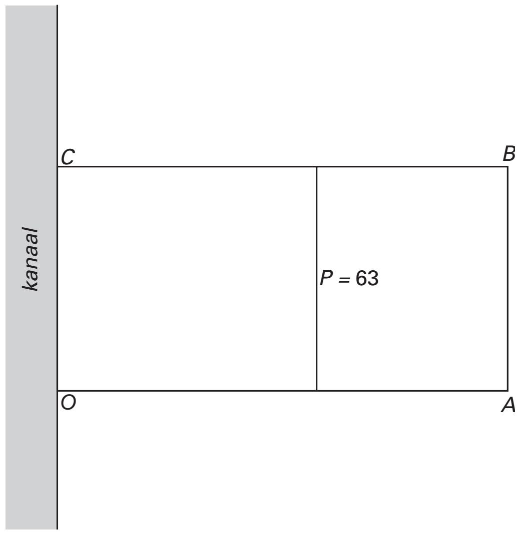
Een nieuw industrieterrein grenst aan een recht kanaal en heeft de vorm van een rechthoek $OABC$.
$OA = 400$ m en $OC = 200$ m. Zie figuur 2.

De grondprijs is afhankelijk van de afstand tot het kanaal: hoe dichter bij het kanaal, hoe duurder de grond.
Het verband tussen de grondprijs P (in euro per m^2) en de afstand tot het kanaal x (in meters) wordt gegeven door de formule:

$$P(x) = 100 \cdot 0{,}998^x$$

De punten waar P gelijk is aan 63 liggen op een lijn. Deze lijn is in figuur 2 getekend. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



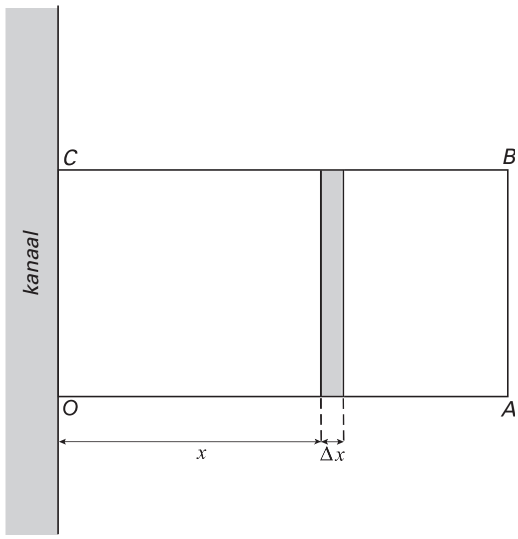
4p **4** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de lijn waarop alle punten liggen waar P gelijk is aan 55. Licht je antwoord toe.

Iemand wil een schatting maken van de grondprijs van het gehele terrein.
Hij maakt daartoe een berekening volgens twee verschillende benaderingsmethoden.
Methode I: hij bepaalt $P(200)$. Deze waarde gebruikt hij als prijs per m^2 voor het hele terrein en daarmee berekent hij de totale grondprijs.
Methode II: hij bepaalt het gemiddelde van $P(0)$ en $P(400)$. Deze waarde gebruikt hij als prijs per m^2 voor het hele terrein en daarmee berekent hij de totale grondprijs.

5p **5** ☐ Bereken de totale grondprijs volgens beide methoden. Geef je antwoord in miljoenen euro, afgerond op twee decimalen.

De totale grondprijs van het terrein is nauwkeuriger te bepalen. Daartoe verdelen we rechthoek $OABC$ in rechthoekjes met lengte 200 meter en breedte Δx meter.
In figuur 3 is één zo'n rechthoekje getekend op x meter van het kanaal.
Neem $P(x)$ als de prijs per m^2 voor het hele rechthoekje x meter van het kanaal. De totale grondprijs is dan bij benadering de som van de grondprijzen van deze rechthoekjes.

figuur 3



5p **6** ☐ Bereken op deze manier de totale grondprijs als $\Delta x = 5$ meter. Geef je antwoord in miljoenen euro, afgerond op twee decimalen.

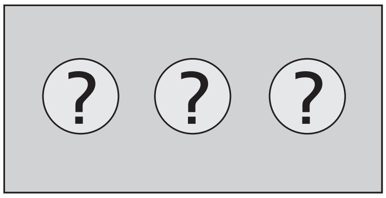
De totale grondprijs is nog nauwkeuriger te berekenen met behulp van een integraal.

4p **7** ☐ Bereken de totale grondprijs met behulp van deze integraal.

Krasloten

Deze opgave gaat over krasloten waarmee je 3 euro of 6 euro of niets kunt ontvangen. Elk kraslot heeft drie vakjes, die je open kunt krassen. Zie figuur 4.

figuur 4



een nog niet opengekrast lot

In één van de vakjes is een MIN (–) verborgen, in de andere twee een PLUS (+).
Je kunt het kraslot inleveren na één vakje of na twee vakjes te hebben opengekrast. Voor elke opengekraste PLUS ontvang je 3 euro, maar als je de MIN hebt opengekrast, is het lot waardeloos geworden. Zie figuur 5.

figuur 5

bij inlevering 6 euro waard   waardeloos lot

Bij de mensen die de krasloten kopen onderscheiden we twee typen krassers:
- *waaghalzen*: krassen een tweede vakje open als het eerste vakje een PLUS oplevert;
- *angsthazen*: krassen één vakje open en stoppen.

Je kunt je afvragen welk type krasser het slimste is.

4p **8** ☐ Bereken voor zowel de *waaghalzen* als de *angsthazen* welk bedrag zij naar verwachting per opengekrast lot zullen ontvangen.

Bij een bepaalde kiosk is gebleken dat 65% van de krassers *waaghals* is en 35% *angsthaas*.
Op zekere dag komen 500 mensen een lot kopen bij deze kiosk en krassen het open.

5p **9** ☐ Bereken hoeveel van deze mensen naar verwachting niets uitbetaald krijgen.

Van een groep mensen bestaande uit 65 *waaghalzen* en 35 *angsthazen* heeft ieder precies één lot opengekrast.

6p **10** ☐ Bereken de kans dat uiteindelijk meer dan 60 mensen van deze groep precies één vakje hebben opengekrast.

Een verzameling functies

Op het domein $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies:
$f_n(x) = 1 + \sin^2 x + \cos nx$ waarbij n een positief geheel getal is.

Als je de grafiek van f_2 door de GR laat tekenen, lijkt deze op een sinusoïde.
Er geldt inderdaad $f_2(x) = a + b\sin c(x - d)$.

6p **11** □ Geef een mogelijke combinatie van waarden voor a, b, c en d. Licht je antwoord toe.

De grafiek van f_n gaat voor bepaalde waarden van n door het punt $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4})$.

4p **12** □ Onderzoek voor welke waarden van n tussen 0 en 50 dit geldt.

$f_4(x)$ is te schrijven als $f_4(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 4x$.

3p **13** □ Toon aan dat dit juist is.

Gegeven is de rechthoek $OABC$ met $A(2\pi, 0)$ en $C(0, 3)$.
De grafiek van f_4 verdeelt deze rechthoek in twee gebieden.

7p **14** □ Toon aan met behulp van integreren dat deze twee gebieden exact dezelfde oppervlakte hebben.

Munten

Bij de invoering van de euro op 1 januari 2002 is een aantal Europese munten ongeldig geworden. In het najaar van 2001 zijn inzamelingsacties van deze munten gehouden.
In november 2001 heeft zich het volgende voorgedaan. Door een bepaalde groep zijn veel Franse munten ingezameld, waaronder 1700 munten van 10FF (Franse Francs). Men is van plan deze munten van 10FF in 17 zakjes van 100 stuks bij een bank in te leveren.

De gang van zaken op de bank in dit soort gevallen is als volgt. Munten van dezelfde soort moeten in zakjes van 100 munten aan de bank worden aangeboden. Een bankbediende telt het aantal munten in een zakje niet, maar weegt het zakje met de munten. Het gewicht van een leeg zakje is verwaarloosbaar. Het gewicht van 100 munten van 10FF is normaal verdeeld met een gemiddelde van 650 gram en een standaardafwijking van 0,5 gram.
Hiermee kan aangetoond worden dat de kans dat een zakje met 100 munten van 10FF minder dan 649,5 gram weegt ongeveer gelijk is aan 0,16.

3p **15** □ Bereken deze kans in drie decimalen nauwkeurig.

Voor het inleveren bij de bank is een lid van de groep op het kwalijke idee gekomen om bij 8 van de 17 zakjes één munt van 10FF te vervangen door één munt van 1FF, die lichter is.
Er zitten dan 99 munten van 10FF en 1 munt van 1FF in elk van die 8 zakjes.
Er worden nu dus 8 'valse' en 9 'goede' zakjes ingeleverd.

4p **16** □ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat van de eerste 5 zakjes die de bankbediende weegt, er 3 vals zijn.

Zakjes met een gewicht dat minder is dan 649,5 noemt men 'te licht'.
Het aantal te lichte zakjes van de 17 te wegen zakjes mag niet te groot zijn. De bank noemt dit aantal n, en wil dat de kans op precies n te lichte zakjes kleiner is dan 1%.

5p **17** □ Welke waarden kan n hebben?

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

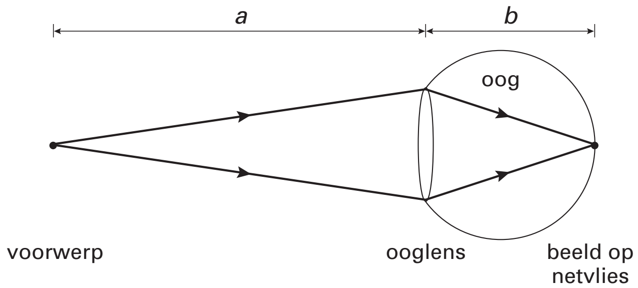
Het menselijk oog

Om een voorwerp op verschillende afstanden scherp te kunnen zien heeft de mens de mogelijkheid om te accommoderen, dat wil zeggen de sterkte van zijn ogen aan te passen, zodat er een scherp beeld op zijn netvlies komt. Om een voorwerp op een afstand a van het oog scherp te kunnen zien is een bepaalde sterkte S van het oog nodig. Voor deze sterkte S gebruiken we het volgende model: $S = \dfrac{a+b}{a \cdot b}$.

Hierbij is:
- a de afstand in meters tussen het voorwerp en de ooglens;
- b de afstand in meters tussen het netvlies en de ooglens;
- S de sterkte in dioptrieën (dpt).

Zie figuur 6.

figuur 6



De afstand b hoeft niet voor beide ogen gelijk te zijn.

Iemand heeft een rechteroog met $b = 0{,}018$ m. Hij kan de sterkte van zijn rechteroog variëren van 58 tot en met 63 dpt.

5p **18** ☐ Bereken op welke afstanden dit rechteroog voorwerpen scherp kan zien. Rond de grenswaarden in je antwoord af op twee decimalen.

Voor zijn linkeroog geldt: $b = 0{,}017$ m.
Hiermee kan hij voorwerpen op afstanden van 15 cm en verder scherp zien.

4p **19** ☐ Bereken welke waarden S kan aannemen. Geef je antwoord in gehele dioptrieën.

Einde