Examen VWO

2009

tijdvak 2
woensdag 24 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B1

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

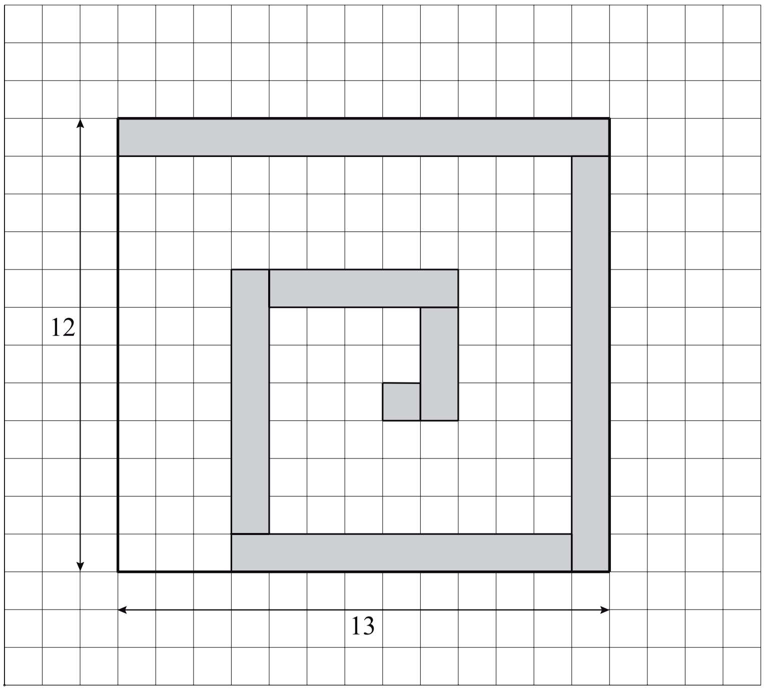
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

949-0151-a-VW-2-o

Een spiraal

In deze opgave bekijken we rechthoekige stroken van breedte 1 en oneven lengte: 1, 3, 5, ..., 99. Door deze stroken op een bepaalde manier aan elkaar te leggen, maken we een spiraal. In figuur 1 is het begin van de spiraal getekend, gelegd op een rooster, waarbij alleen de eerste zeven stroken zijn gelegd. De totale oppervlakte van deze zeven stroken is 49. Dit begin van de spiraal past precies in een rechthoek van 13 bij 12; die rechthoek is in figuur 1 dik getekend. Van deze rechthoek is $\frac{49}{156}$ deel bedekt door de spiraal.

figuur 1



Ook de volledige spiraal van de stroken van lengte 1, 3, 5, …, 99 past precies in een rechthoek.

5p **1** Bereken welk deel van die rechthoek door de volledige spiraal bedekt wordt.

We kunnen op dezelfde manier een spiraal leggen met rechthoekige stroken van breedte 1 en even lengte: 2, 4, 6, 8, 10, …, n. Hierbij is n een even getal.
De spiraal van deze stroken past precies in een rechthoek van n bij $n-1$.
De fractie van de rechthoek die door de spiraal bedekt wordt noemen we V.
Voor even waarden van n geldt de volgende formule:

$$V = \frac{n+2}{4n-4}$$

Voor iedere even waarde van n is V groter dan $\frac{1}{4}$. Als voor n steeds grotere waarden worden genomen, komt de waarde van V steeds dichter bij $\frac{1}{4}$.

5p **2** Bereken langs algebraïsche weg de kleinste waarde van n waarvoor de waarde van V minder dan $\frac{1}{100}$ verschilt van $\frac{1}{4}$.

Het gemiddelde van normale verdelingen

In een land leven twee stammen, de Langen en de Korten. Van beide stammen is de lichaamslengte van een volwassen man normaal verdeeld: van de Langen met gemiddelde 185 cm, van de Korten met gemiddelde 160 cm. Beide verdelingen hebben standaardafwijking 6 cm.
In het land behoort 20% van de volwassen mannen tot de Langen en 80% tot de Korten.

Als er bij de Korten evenveel volwassen mannen zouden zijn als bij de Langen, dan zou de gemiddelde lichaamslengte van alle volwassen mannen 172,5 cm zijn. In dit geval is dat niet zo: de gemiddelde lengte van alle volwassen mannen is 165 cm.

2p **3** Toon dit aan.

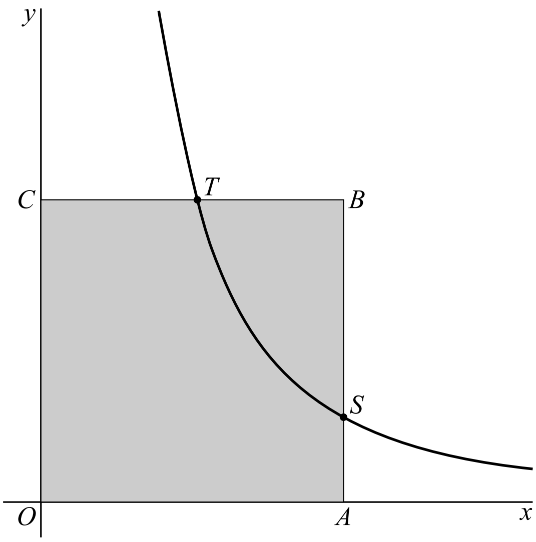
Er geldt dat de lichaamslengte van meer dan 60% van de volwassen mannen in het land kleiner is dan de gemiddelde lengte van alle volwassen mannen.

4p **4** Toon dit aan.

3p **5** Is de lichaamslengte van de totale groep van de volwassen mannen in het bewuste land normaal verdeeld? Licht je antwoord toe.

Een verdeeld vierkant

figuur 1



Voor $x > 0$ is gegeven de functie f met $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

In figuur 1 is de grafiek van f getekend en het vierkant met hoekpunten $O(0, 0)$, $A(p, 0)$, $B(p, p)$ en $C(0, p)$ voor zekere $p > 1$.

De grafiek van f snijdt AB in $S\,(p, \frac{1}{p^2})$ en BC in $T\,(\frac{1}{\sqrt{p}}, p)$.

3p **6** Bereken voor het geval dat $p = 4$ de richtingscoëfficiënt van lijnstuk ST.

4p **7** Neem weer $p = 4$. Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnstukken CT, OC, OA en AS.

4p **8** Bereken exact de waarde van p waarvoor T het midden is van zijde BC.

6p **9** Bereken met behulp van differentiëren de waarde van p waarvoor diagonaal AC raakt aan de grafiek van f. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Onnodig ingewikkeld?

Een gezonde volwassene is ’s morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$$S = \ln(-0,00216t + 2,7183).$$

Hierin is t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan.

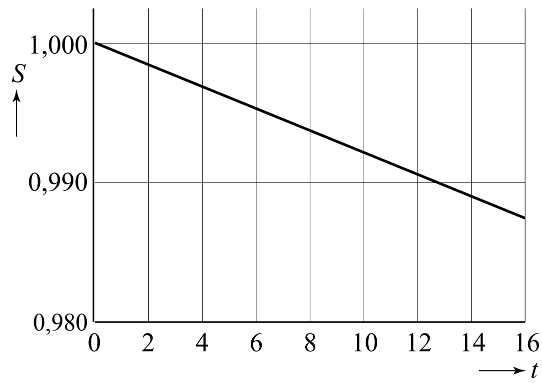
Dus $S = \dfrac{L}{L_0}$.

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

4p **10** Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

figuur 1



In figuur 1 is de grafiek van S als functie van t getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule weten wij dat dit niet zo is.

6p **11** Leg met behulp van de tweede afgeleide uit of er voor $0 \le t \le 16$ sprake is van toenemende of afnemende daling.

De grafiek van S valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$. Is de formule van S met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor S ook gewoon een lineaire functie van t kunnen nemen.
We vergelijken daarom de formule $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ met de formule $S = -0,0008t + 1,0000$ die hoort bij de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$.

We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van beide formules kun je op elk tijdstip t (met $0 \le t \le 16$) de lengte van meneer Jansen in de loop van de dag uitrekenen. Ook kun je op elk tijdstip t het verschil tussen de uitkomsten van beide formules bekijken.

4p **12** Bereken het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen dat de twee formules kunnen opleveren.

Een leugendetector

Een leugendetector meet allerlei aspecten van het lichaam (ademhaling, hartslag, bloeddruk, zweten) tijdens een verhoor. Het idee achter het gebruik van een leugendetector is dat iemands lichaam zich anders gedraagt wanneer hij of zij liegt dan wanneer hij of zij de waarheid spreekt.
Men heeft onderzocht in hoeverre een leugendetector betrouwbaar is. De uitkomsten zijn als volgt:

- als iemand liegt, wordt hij door de leugendetector in 88% van de gevallen ook als leugenaar aangewezen (en in 12% van de gevallen wordt hij niet als leugenaar aangewezen);
- als iemand de waarheid spreekt, wordt hij door de leugendetector in 25% van de gevallen toch als leugenaar aangewezen (en in 75% van de gevallen wordt hij niet als leugenaar aangewezen).

Vijf mensen worden onderworpen aan een verhoor. Het is zeker dat één van hen liegt en dat de andere vier personen de waarheid spreken. Bij het verhoor wordt gebruikgemaakt van de leugendetector.

3p **13** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal personen dat bij dit verhoor door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen.

Er zijn twee manieren waarop de leugendetector één van de vijf mensen die worden verhoord kan aanwijzen als leugenaar:

- de leugenaar wordt aangewezen als leugenaar en de waarheidsprekers niet;
- één van de waarheidsprekers wordt aangewezen als leugenaar en de andere vier personen niet.

5p **14** Bereken de kans dat één van deze vijf mensen door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen.

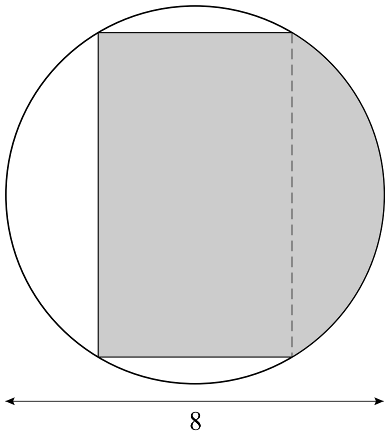
De kans dat iemand die de waarheid spreekt toch door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen, is 25%. Daaruit volgt bijvoorbeeld dat de kans dat hij van tien mensen die de waarheid spreken er minstens één aanwijst als leugenaar ongeveer 94% is. Dat is onacceptabel hoog. De leugendetector moet worden verbeterd zo dat de kans dat hij van tien mensen die de waarheid spreken er minstens één als leugenaar aanwijst, hoogstens 50% is.

5p **15** Bereken hoe groot de kans dat de leugendetector iemand die de waarheid spreekt als leugenaar aanwijst maximaal mag zijn.

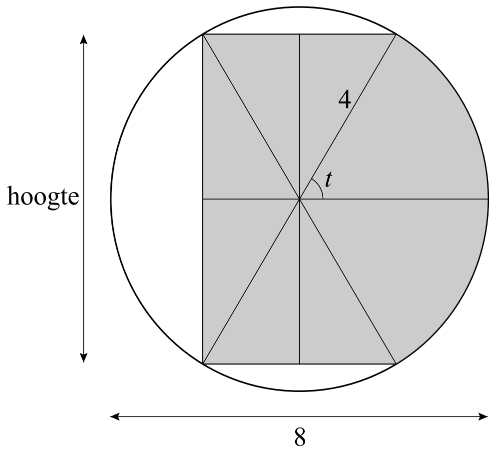
Bebuikte rechthoeken

Binnen een cirkel met straal 4 bekijken we gebieden die bestaan uit een rechthoek (met de hoekpunten op de cirkel), aan de rechter kant aangevuld met een cirkelsegment. Zo'n gebied heeft dan de vorm van een rechthoek met een buik. Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 2



In figuur 2 is het gebied verdeeld in twee cirkelsectoren, beide met middelpuntshoek t radialen, en zes gelijke rechthoekige driehoeken. Deze driehoeken hebben ook een hoek met grootte t radialen.
De oppervlakte O van het gebied is een functie van t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
Er geldt: $O(t) = 16t + 24 \cdot \sin 2t$.

6p **16** Toon de juistheid van deze formule aan.

4p **17** Bereken de exacte waarde van O als de hoogte van het gebied 4 is.

Bij een bepaalde hoogte is de oppervlakte O maximaal.
7p **18** Bereken de exacte waarde van deze hoogte.