

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 14, 17 en 18 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Drie functies f , g en h

In figuur 1 zijn de grafieken getekend van de functies

$$f(x) = 3 - x^2 \text{ en } g(x) = x + 1.$$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $A(-2, -1)$ en $B(1, 2)$.

4p **1** Los op: $f(x) \leq -4$.

5p **2** Bereken de grootte van de hoek tussen de grafieken van f en g in het punt B . Rond je antwoord af op hele graden.

Een verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in D en de grafiek van g in E , waarbij E tussen A en B ligt. De lengte van lijnstuk DE is gelijk aan $1\frac{1}{4}$.

6p **3** Bereken p .

h is de functie gegeven door

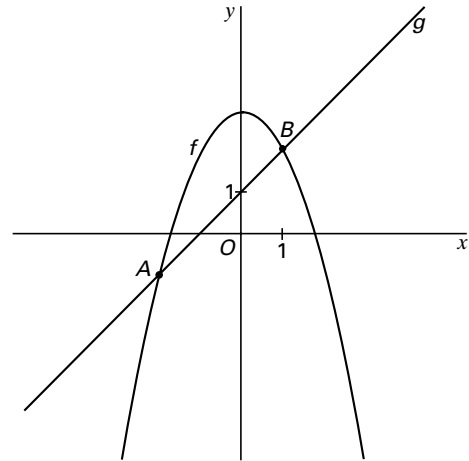
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

In figuur 2 is de grafiek van h getekend. Hierop ligt het punt F met x -coördinaat 1. Lijn m is de raaklijn in F aan de grafiek van h .

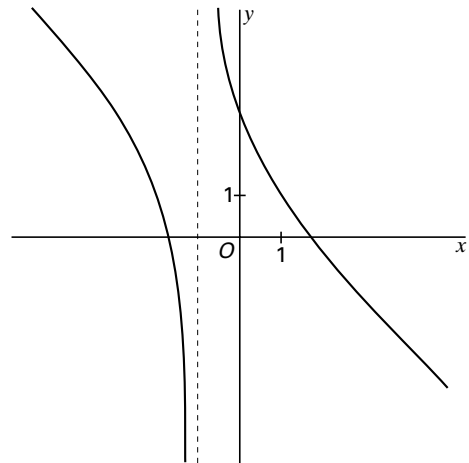
S is het snijpunt van lijn m met de y -as.

6p **4** Bereken de coördinaten van S .

figuur 1



figuur 2



Weerstand

Een wielrenner moet op de vlakke weg twee soorten weerstand overwinnen om vooruit te komen: de luchtweerstand en de rolweerstand.

De rolweerstand hangt voornamelijk af van het soort wegdek, maar verder ook van het gewicht van de renner en van het type band dat gebruikt wordt: een brede noppenband geeft meer weerstand dan een smalle raceband.

Een maat voor de inspanning om deze weerstanden te overwinnen is het vermogen. Vermogen is de hoeveelheid arbeid die per seconde wordt verricht. De eenheid van vermogen is watt.

Voor een wielrenner van 75 kg die op een fiets met trainingsbanden rijdt, gelden bij windstil weer bij benadering de volgende formules:

$$P_{\text{rol}} = 0,75v \quad \text{en} \quad P_{\text{lucht}} = 0,004v^3$$

P_{rol} is het vermogen nodig om de rolweerstand te overwinnen, uitgedrukt in watt.

v is de snelheid van de wielrenner, uitgedrukt in kilometer per uur.

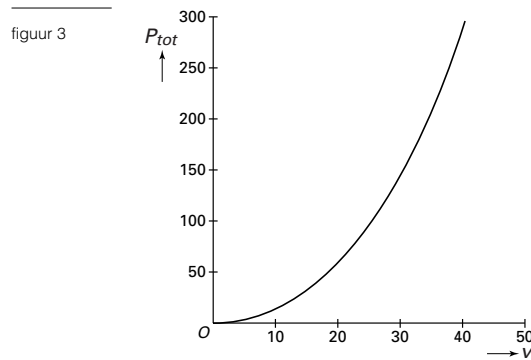
P_{lucht} is het vermogen nodig om de luchtweerstand te overwinnen, uitgedrukt in watt.

- 4p **5** Bereken bij welke snelheden de luchtweerstand gelijk is aan de rolweerstand. Geef je antwoord in kilometer per uur, afgerond op één decimaal.

P_{tot} is het totale vermogen (in watt) dat door de wielrenner moet worden geleverd om met snelheid v vooruit te komen:

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{rol}} + P_{\text{lucht}}$$

In figuur 3 is de grafiek getekend van het verband tussen het geleverde vermogen P_{tot} van de renner en zijn snelheid v .



Voor het handhaven van een snelheid van 26 km per uur moet de renner meer vermogen leveren dan voor het handhaven van een snelheid van 25 km per uur.

- 3p **6** Bereken hoeveel meer vermogen hij moet leveren.

De grafiek van figuur 3 wekt de indruk dat er een toenemende stijging is van het totaal benodigde vermogen bij toenemende snelheid.

- 4p **7** Toon met behulp van de afgeleide $\frac{dP_{\text{tot}}}{dv}$ aan dat dit voor elke positieve waarde van v geldt.

De wielrenner stapt over op een ligfiets, omdat hij gehoord heeft dat:

- het vermogen dat nodig is om de luchtweerstand te overwinnen 25 procent minder is, zodat P_{lucht} gelijk is aan $0,003v^3$;
- de rolweerstand van een ligfiets dezelfde is als van een racefiets;
- je op een ligfiets door de speciale houding anderhalf keer zoveel vermogen levert bij dezelfde inspanning als op een racefiets.

Neem aan dat deze drie effecten inderdaad optreden.

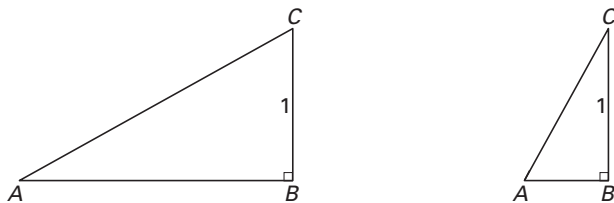
De wielrenner rijdt tijdens trainingen op zijn racefiets 30 kilometer per uur.

- 6p **8** Toon aan dat de wielrenner in dat geval op de ligfiets met dezelfde inspanning als op zijn racefiets ruim 38 kilometer per uur fietst.

Rechthoekige driehoeken

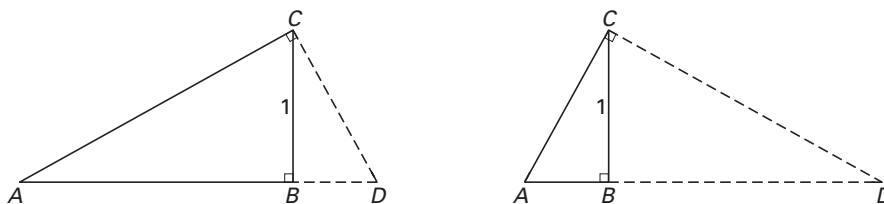
Van driehoek ABC is gegeven dat AB loodrecht staat op BC en dat $BC = 1$. In figuur 4 zijn twee van zulke driehoeken getekend.

figuur 4



Het punt D ligt op het verlengde van AB aan de kant van B zodanig dat CD loodrecht op AC staat. Zie figuur 5.

figuur 5



Door de grootte van hoek A te variëren, veranderen de lengtes van AC en CD . De totale lengte van de lijnstukken AC en CD noemen we L . L is afhankelijk van de grootte van hoek A . De grootte van hoek A wordt steeds uitgedrukt in radialen.

6p **9** □ Bereken L als $\angle A = \frac{1}{5}\pi$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Stellen we de grootte van hoek A gelijk aan x , dan is L een functie van x , waarbij $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

Er geldt:
$$L(x) = \frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\cos(x)}$$

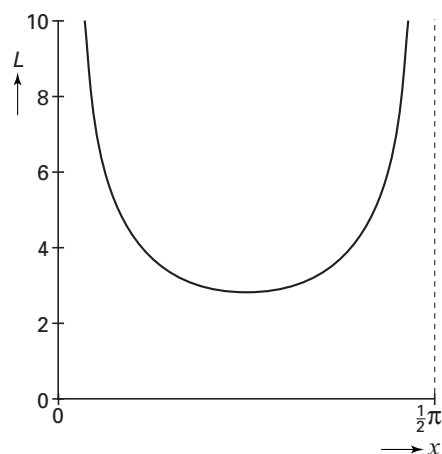
4p **10** □ Toon aan dat dit voor elke hoek x juist is.

In figuur 6 is de grafiek getekend van L als functie van x .

Deze grafiek geeft de indruk dat L een minimale waarde heeft voor $x = \frac{1}{4}\pi$.

6p **11** □ Ga met behulp van $L'(x)$ na of het minimum inderdaad optreedt voor $x = \frac{1}{4}\pi$.

figuur 6



Lawaaitrauma

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.

Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.

Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982–1988 exponentieel toenam.

- 5p **12** □ Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

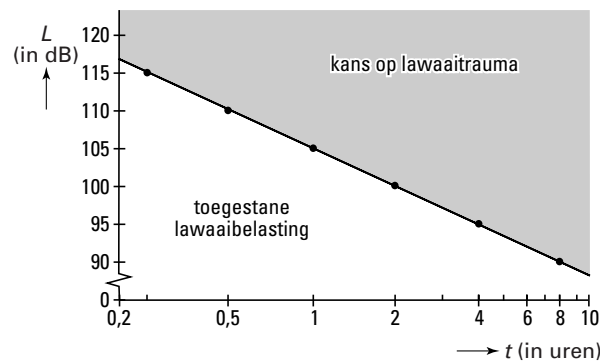
In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidsterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.

Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:

- bij een voortdurende geluidsterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidsterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

In het assenstelsel van figuur 7 is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidsterkte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industrielawaai in de VS.

figuur 7



De formule die hoort bij de in figuur 7 getekende lijn is van de vorm $L = a \cdot \log(t) + b$. Hierbij is L de geluidsterkte in dB en t de maximaal toegestane werktijd in uren.

- 4p **13** □ Toon aan dat $a \approx -16,6$ en $b = 105$.

De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:

- bij een voortdurende geluidsterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidsterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

Op de bijlage bij vraag 14 is de lijn van figuur 7, behorend bij de norm van de VS, nogmaals in een assenstelsel getekend.

- 3p **14** □ Teken in dit assenstelsel de lijn die bij de Europese norm hoort.

In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidsterkte. In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidsterkte maximaal 6 uur per dag werken.

- 5p **15** □ Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Showmodel

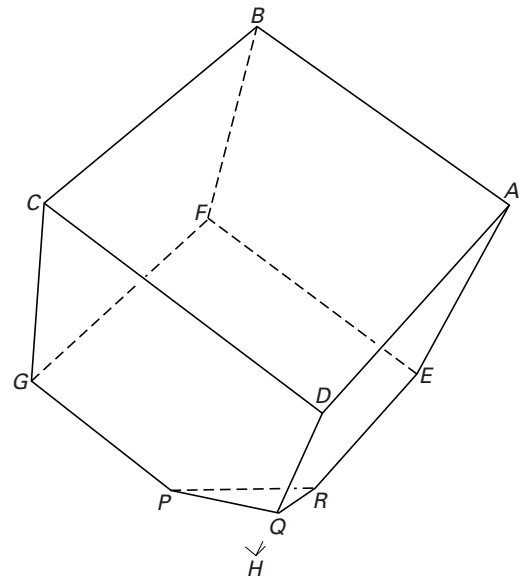
In een Doe-Het-Zelf-winkel staat een showmodel om verschillende soorten vloerbedekking te laten zien: parket, laminaat en vinyl. Zie de foto.

Het showmodel is een kubus $ABCD.EFGH$ (met de diagonaal BH verticaal) die bij hoek H is afgeknot. Zie figuur 8. De kubus staat met het afgeknotte gedeelte PQR op een rechthoekig blok, een zogenaamde sokkel. Zo zijn er zes grensvlakken waarop men een vloerbedekking kan laten zien.

foto



figuur 8



De niet-afgeknotte ribben zijn 100 cm lang; de ribben GP , DQ en ER zijn 80 cm lang.

- 5p **16** Bereken de oppervlakte van dat deel van de afgeknotte kubus dat gebruikt kan worden om vloerbedekking te laten zien.

In de figuur op de bijlage bij vraag 17 is een begin getekend van het bovenaanzicht van de afgeknotte kubus.

- 7p **17** Maak dit bovenaanzicht af. Zet de letters D , E , G , P , Q en R erbij. Teken met stippellijnen de ribben die je van bovenaf *niet* kunt zien.

In de figuur op de bijlage bij vraag 18 is een aanzicht van de afgeknotte kubus getekend waarin BG en BA evenwijdig zijn aan het vlak van tekening. Door de toegevoegde stippellijnen en het punt H wordt het een aanzicht van een gehele kubus.

De sokkel heeft een hoogte van 20 cm.

- 7p **18** Onderzoek door middel van een berekening of de totale hoogte van het showmodel (inclusief sokkel) minder dan 185 cm is.

Einde