Wiskunde B (oude stijl)

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 **02**

Tijdvak 1
Maandag 27 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 3 en 15 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg, of berekening ontbreekt.

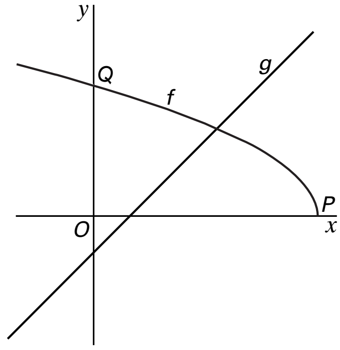
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Twee functies en hun som

In figuur 1 zijn de grafieken getekend van de functies
$f(x) = \sqrt{-2x+12}$ en $g(x) = x - 1$.

figuur 1



De grafiek van f snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

4p **1** ☐ Bereken de lengte van het lijnstuk PQ. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

7p **2** ☐ Los op: $f(x) \leq g(x)$.

De grafieken van f en g staan ook in de figuur op de bijlage.
s is de somfunctie met $s(x) = f(x) + g(x)$.

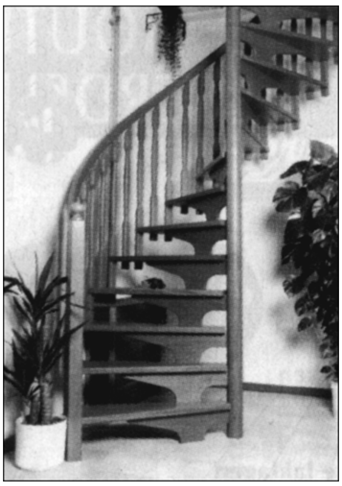
4p **3** ☐ Teken in de figuur op de bijlage met behulp van de grafieken van f en g de grafiek van s voor $-2 \leq x \leq 6$.

8p **4** ☐ Bereken het maximum van de somfunctie s.

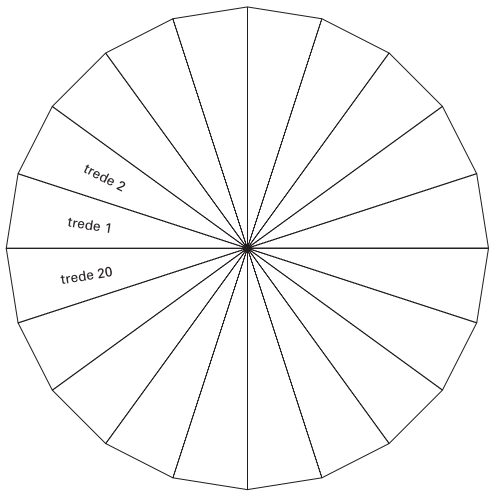
Wenteltrap

Op de foto is een gedeelte van een houten wenteltrap afgebeeld.
De wenteltrap bestaat uit een centrale houten paal (spil) met uitsparingen waarin de traptreden bevestigd zijn.
De trap heeft 20 houten treden en maakt een hele slag (360 graden).

foto



figuur 2



De treden hebben alle dezelfde afmetingen; in een bovenaanzicht overlappen ze elkaar niet en is er ook geen tussenruimte tussen de treden. Zie figuur 2. De centrale paal, de armleuning en extra steunen zijn in het bovenaanzicht weggelaten.

In het bovenaanzicht heeft elke trede de vorm van een driehoek, waarvan twee zijden een lengte van 1 meter hebben.

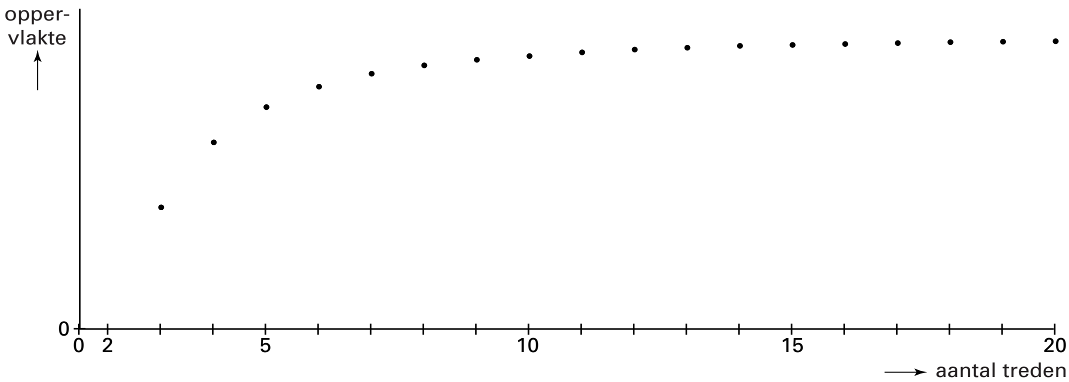
4p **5** ☐ Toon aan dat de derde zijde van zo'n driehoek ongeveer 31,3 cm is.

De treden hebben een dikte van 4 cm.

5p **6** ☐ Bereken de totale hoeveelheid hout die verwerkt is in de 20 treden. Geef je antwoord in m^3, afgerond op drie decimalen.

Men kan ook met een ander aantal dan 20 treden (steeds met twee zijden van 1 meter), die elkaar niet overlappen, een hele slag maken met een wenteltrap. De totale oppervlakte van het bovenaanzicht van de trap hangt dan af van het aantal treden.
In figuur 3 is de grafiek getekend van de totale oppervlakte van het bovenaanzicht (in m^2) voor verschillende aantallen treden.

figuur 3



De grafiek lijkt een horizontale asymptoot te hebben. Dat is ook het geval, want ruim 2200 jaar geleden bewees Archimedes al dat de oppervlakte van het bovenaanzicht de grenswaarde heeft die je mag verwachten als je figuur 2 voor een zeer groot aantal treden tekent.

3p **7** ☐ Bereken die grenswaarde.

CD-roms

In een winkel waar men muziek-cd's verkoopt, is men enkele jaren terug ook begonnen met de verkoop van cd-roms.
Op 1 november 1998 waren bij de winkelier 200 cd-roms verkrijgbaar.
Op 1 november 2000 bleek dit aantal drie keer zo groot te zijn.

Neem aan dat er sprake is van exponentiële groei in de genoemde periode en dat deze groei zich in de jaren daarna voortzet.

4p **8** ☐ Bereken hoeveel cd-roms er dan op 1 november 2003 in deze winkel zullen zijn.

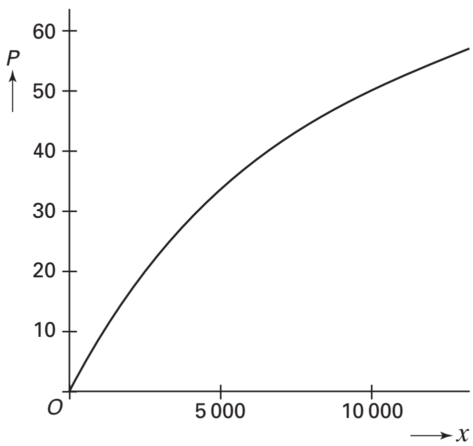
Het aantal muziek-cd's in deze winkel blijft vrijwel constant, ongeveer 10 000. Het aantal cd-roms neemt toe en daardoor stijgt het percentage cd-roms ten opzichte van het totaal aantal cd's.
Laat x het aantal cd-roms zijn. Het percentage cd-roms wordt dan gegeven door de formule:

$$P(x) = \frac{100x}{10\,000 + x}$$

4p **9** ☐ Bereken bij welk aantal cd-roms dit percentage volgens deze formule gelijk is aan 8.

In figuur 4 is de grafiek getekend die hoort bij de hierboven gegeven formule.

figuur 4



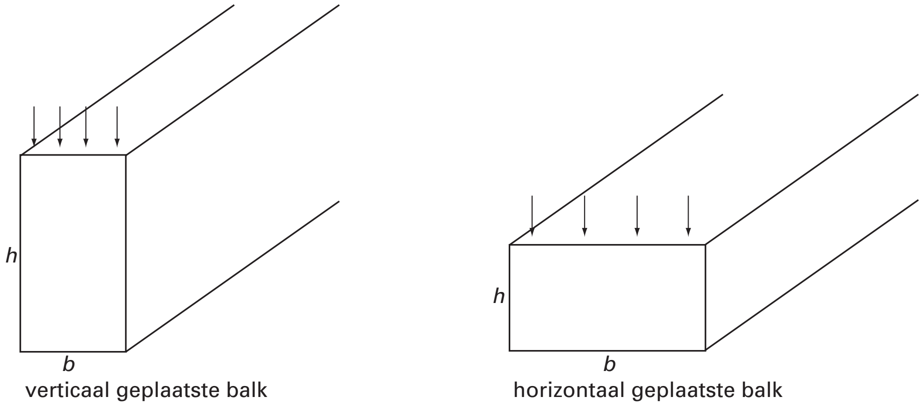
Deze figuur wekt de indruk dat bij toenemende x de helling van de grafiek afneemt.

5p **10** ☐ Toon met behulp van de afgeleide $P'(x)$ aan dat de helling van deze grafiek inderdaad afneemt bij toenemende x.

Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort.
We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur 5. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.

figuur 5



Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0{,}12 \cdot b \cdot h^2$.
Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm.
Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

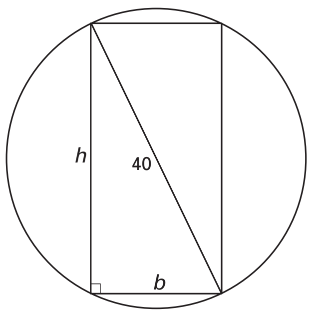
3p **11** ☐ In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.

De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 40 cm^2.
Voor de sterkte S geldt: $S = 96$.

5p **12** ☐ Bereken de hoogte h en de basis b van deze dwarsdoorsnede.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h.
Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0{,}12 \cdot b \cdot h^2$.
De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie figuur 6.

figuur 6



In deze situatie kan voor de sterkte de volgende formule gevonden worden:
$S = 192 \cdot b - 0{,}12 \cdot b^3$.

4p **13** ☐ Toon aan dat deze formule juist is.

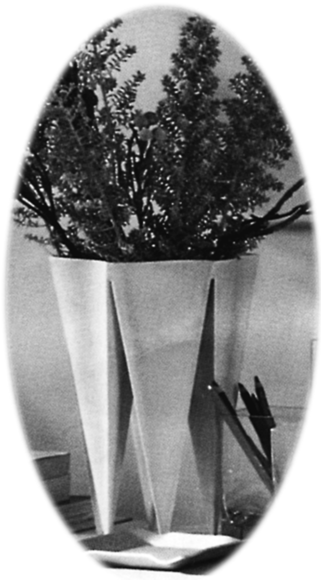
Men wil de balk zo uit de boom zagen dat de sterkte S maximaal is.

5p **14** ☐ Bereken de afmetingen van de dwarsdoorsnede van de balk in dat geval. Geef de waarden van b en h in één decimaal nauwkeurig.

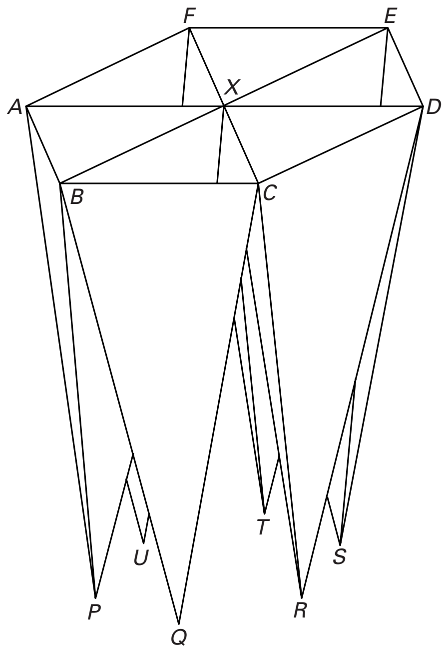
Zespiramidenvaas

Op de foto is een zespiramidenvaas te zien. In figuur 7 is een model van deze vaas getekend. Het model bestaat uit zes identieke regelmatige, driezijdige piramiden. De zes grondvlakken van deze piramiden (bovenaan in figuur 7) liggen in één vlak en vormen samen een regelmatige zeshoek *ABCDEF*. De diagonalen *AD*, *BE* en *CF* snijden elkaar in het punt *X*. De achttien opstaande ribben zijn even lang.
De vaas steunt met de toppen *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* en *U* op de grond.

foto



figuur 7

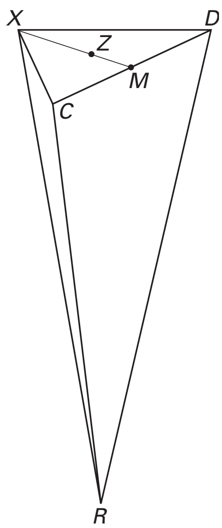


In de linker figuur op de bijlage bij vraag 15 is een begin getekend van een bovenaanzicht van de vaas; in de rechter figuur is een begin getekend van een zijaanzicht, waarbij de kijkrichting evenwijdig is met *BD*.
Beide aanzichten zijn op schaal getekend.

10p **15** ☐ Voltooi de beide aanzichten. Zet alle letters erbij.

In figuur 8 is één van de zes regelmatige piramiden getekend. *M* is het midden van de ribbe *CD*. *Z* is het zwaartepunt van driehoek *XCD*. Er geldt dan: de lengte van *MZ* is $\frac{1}{3}$ deel van de lengte van *MX*.
Z ligt recht boven *R*.
De hoogte *RZ* van de vaas is 28 cm en de zijden van de regelmatige zeshoek *ABCDEF* zijn 12 cm.

figuur 8



6p **16** ☐ Bereken $\angle XMR$. Rond je antwoord af op hele graden.

In de vaas wordt zo veel water gedaan dat in alle zes piramiden de waterspiegels op halve hoogte staan.
De totale oppervlakte van de waterspiegels is dan ongeveer 93,5 cm^2.

4p **17** ☐ Toon dat aan.

Er wordt 3 liter water in de lege vaas gegoten (1 liter = 1 dm^3).

5p **18** ☐ Bereken voor hoeveel procent de vaas dan gevuld is. Geef je antwoord in gehele procenten nauwkeurig.

Einde