Wiskunde B Profi

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 00

Tijdvak 1
Donderdag 25 mei
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 3, 4, 6 en 13 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

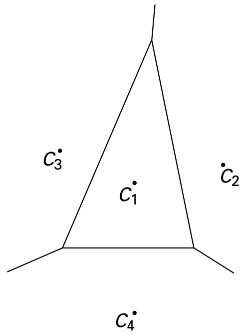
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Centra

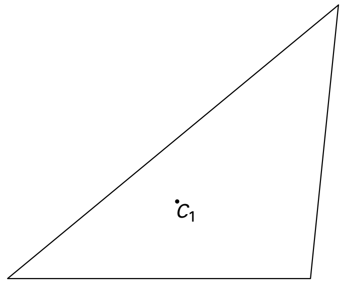
C_2, C_3 en C_4 zijn de hoekpunten van een driehoek waarbinnen punt C_1 ligt.
In figuur 1 is het Voronoi-diagram getekend met C_1, C_2, C_3 en C_4 als centra.
Het diagram bestaat uit een driehoekige cel rond C_1 en drie oneindige cellen.
Deze opgave gaat over Voronoi-diagrammen van dit type.

figuur 1



In figuur 2 en op de bijlage is een gedeelte van een Voronoi-diagram van dit type getekend; alleen centrum C_1 is getekend met de bijbehorende cel.

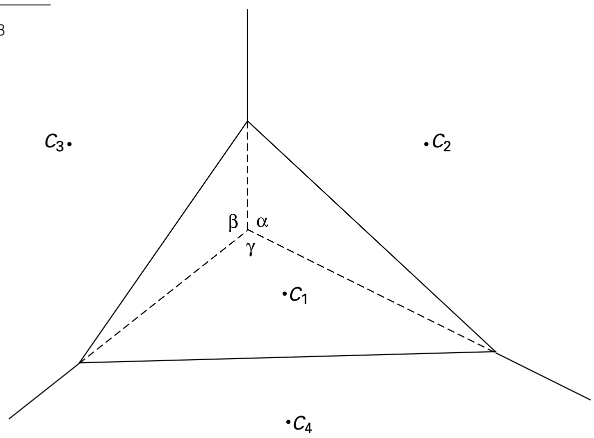
figuur 2



4p **1** □ Teken in de figuur op de bijlage de centra C_2, C_3 en C_4 en de overige grenslijnen van het diagram. Licht je werkwijze toe.

De grenslijnen tussen de drie oneindige cellen van zo'n Voronoi-diagram gaan na verlenging door één punt. Noem dit punt S. Noem de hoeken die de verlengden van deze grenslijnen in S met elkaar maken: α, β en γ. Zie figuur 3.
Deze figuur staat ook op de bijlage.
Bekijk nu driehoek $C_2C_3C_4$.

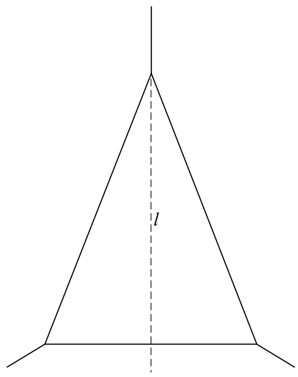
figuur 3



6p **2** □ Druk de grootte van de hoeken van driehoek $C_2C_3C_4$ uit in α, β en γ.

In figuur 4 en op de bijlage is een symmetrisch Voronoi-diagram van bovenstaand type getekend. De grenslijn van de cellen van C_2 en C_3 is een deel van de symmetrie-as l. C_1 ligt binnen de driehoekige cel. C_1 en C_4 liggen op l, C_2 ligt rechts van l en C_3 links van l.
De volgende vragen gaan over het tekenen van de centra van dit diagram.

figuur 4



C_2 ligt op het spiegelbeeld van as l in de grenslijn tussen de cellen rond C_1 en C_2.

2p **3** □ Teken dat spiegelbeeld in de figuur op de bijlage.

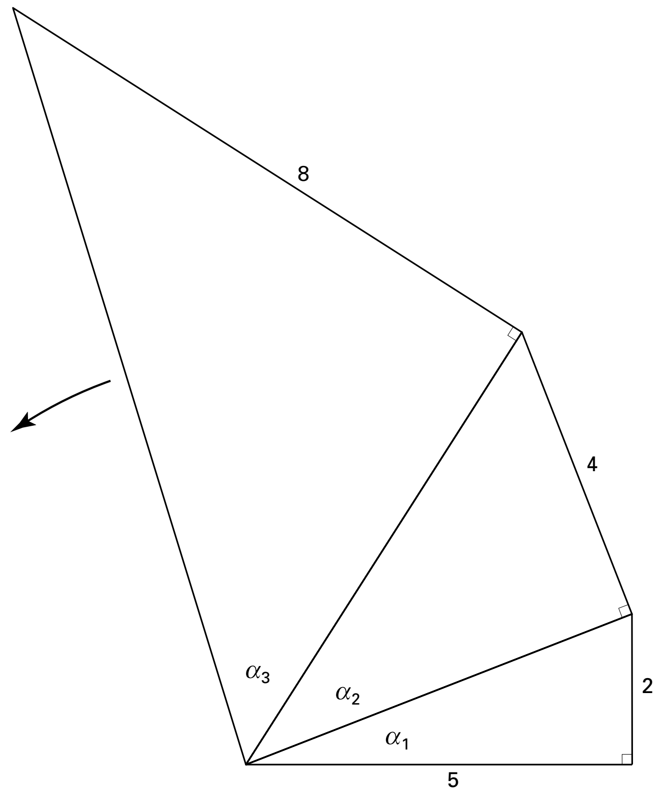
Vervolgens kan de plaats van C_4 op as l bepaald worden.

6p **4** □ Teken de centra C_4, C_1, C_2 en C_3 in de figuur op de bijlage. Licht je werkwijze toe.

Een spiraal van driehoeken

In figuur 5 is het begin van een spiraal van rechthoekige driehoeken getekend. Hierbij is eerst een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 5 en 2 getekend. De schuine zijde van deze driehoek is rechthoekszijde van de tweede rechthoekige driehoek. Van deze tweede driehoek dient de schuine zijde weer als rechthoekszijde van de derde rechthoekige driehoek. Enzovoort.
De hoeken van de opvolgende driehoeken bij het draaipunt zijn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ radialen. De zijden tegenover deze hoeken zijn 2, 4, 8, … . Van de n^e driehoek is de hoek bij het draaipunt dus α_n en de zijde tegenover deze hoek 2^n.

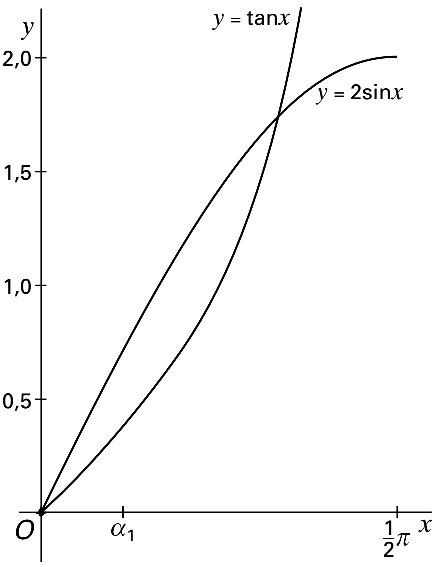
figuur 5



6p **5** □ Bewijs dat voor $k = 1, 2, 3, \ldots$ geldt: $\tan \alpha_{k+1} = 2 \sin \alpha_k$.

In figuur 6 staan de grafieken van de functies $y = \tan x$ en $y = 2 \sin x$ op het domein $[0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Op de x-as is α_1 aangegeven. De figuur staat ook op de bijlage.

figuur 6



5p **6** □ Geef in de figuur op de bijlage met behulp van de grafieken α_2 en α_3 aan op de x-as.

5p **7** □ Bereken exact $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k$.

Kettinglijn

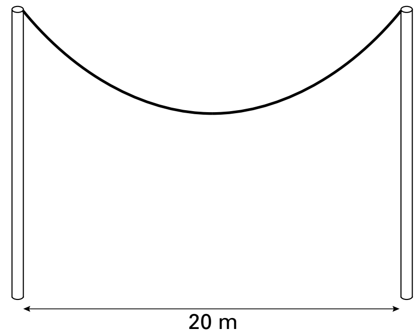
In deze opgave bekijken we voor elk positief getal a de functie $f(x) = \frac{1}{2a}(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax})$.

Neem $a = 1$.

6p **8** □ Bewijs dat $(f(x))^2 = (f'(x))^2 + 1$ voor elke x.

Kabels die vrij in de lucht hangen tussen twee masten, zoals bijvoorbeeld hoogspanningskabels, hangen volgens een kromme die de vorm heeft van de grafiek van een functie f. Vandaar dat die ook wel een kettinglijn wordt genoemd.
We nemen als voorbeeld een kabel die is opgehangen tussen twee even hoge masten die 20 meter uit elkaar staan. Zie figuur 7.

figuur 7



Hoewel kettinglijnen en parabolen verschillende krommen zijn, lijken ze op elkaar.
We kiezen als volgt een assenstelsel: de x-as ligt op de grond recht onder de kabel en de y-as staat verticaal en gaat door het laagste punt van de kabel. Als eenheid op de x-as en de y-as nemen we 1 meter.
Neem aan dat de kabel hangt volgens de formule $y = 5 \cdot (\mathrm{e}^{0,1x} + \mathrm{e}^{-0,1x})$.
We benaderen deze kettinglijn door de parabool met vergelijking $y = r(x - p)^2 + q$ die door de ophangpunten van de kabel gaat en waarvan de top het laagste punt van de kabel is.

5p **9** □ Toon aan dat $p = 0$, $q = 10$ en $r \approx 0,0543$.

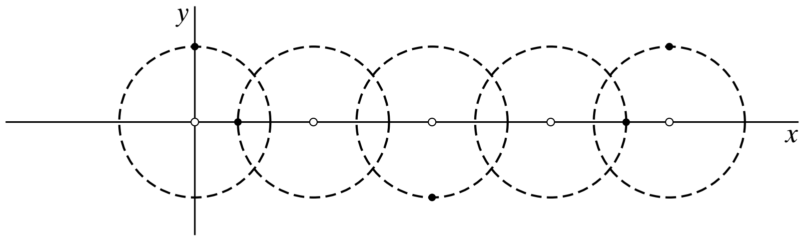
De kettinglijn en de parabool verschillen overal in hoogte boven de grond, behalve in de twee ophangpunten en de top.

4p **10** □ Onderzoek met behulp van je grafische rekenmachine wat het grootste verschil in hoogte is tussen de kettinglijn en de parabool. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Een schuivende cirkelbeweging

Een punt P maakt rond een punt M een cirkelbeweging in positieve richting met snelheid 2.
Op tijdstip 0 bevindt M zich in de oorsprong. M wordt naar rechts geschoven met constante snelheid 2. In figuur 8 is de cirkel getekend op de tijdstippen 0, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ en π; op elke cirkel is de positie van het punt P aangegeven.

figuur 8



P heeft de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 2t - \sin(2t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

8p **11** □ Bewijs dat de snelheid van P op tijdstip t gelijk is aan $4|\sin(t)|$.

4p **12** □ Bereken de exacte lengte van de baan die P aflegt tussen de tijdstippen 0 en π.

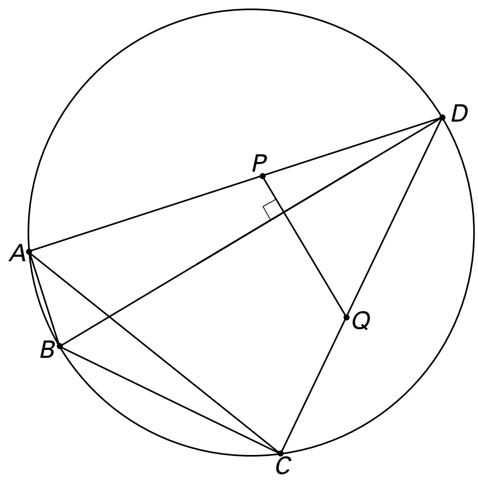
Koordenvierhoek

In figuur 9 en op de bijlage is een cirkel met koordenvierhoek $ABCD$ getekend waarbij BD een middellijn van de cirkel is.

Punt P ligt op de zijde AD en punt Q op zijde CD zó dat PQ loodrecht staat op BD.

8p **13** □ Bewijs dat $PACQ$ een koordenvierhoek is.

figuur 9



Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

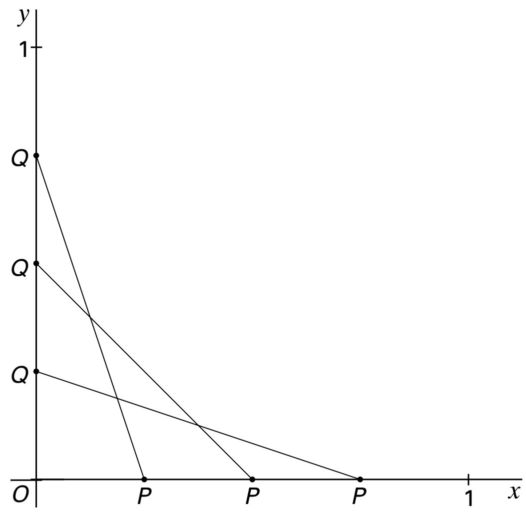
Bewegende punten

Een punt P beweegt over de x-as van $(0, 0)$ naar $(1, 0)$. Tegelijkertijd beweegt een punt Q over de y-as van $(0, 1)$ naar $(0, 0)$. P en Q starten op tijdstip 0 en hebben beide snelheid 1. Op tijdstip t is P dus in $(t, 0)$ en Q in $(0, 1 - t)$.

In deze opgave geldt: $0 \leqq t \leqq 1$.

In figuur 10 is voor drie waarden van t het lijnstuk PQ getekend.
Op grond van symmetrie is te verwachten dat de lengte van PQ minimaal is voor $t = \frac{1}{2}$.

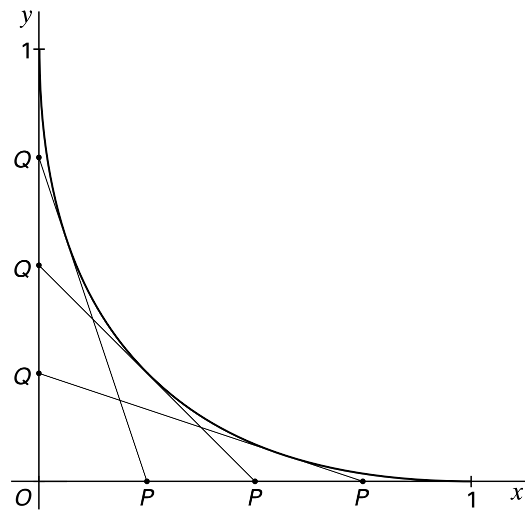
figuur 10



4p **14** □ Onderzoek of de lengte van PQ inderdaad minimaal is voor $t = \frac{1}{2}$.

In figuur 11 zijn de lijnstukken uit figuur 10 getekend en ook de kromme met vergelijking $y = (1 - \sqrt{x})^2$ voor $0 \leqq x \leqq 1$.
Op elk tijdstip t ligt het punt $A(t^2, (1 - t)^2)$ op deze kromme.
In de vragen 15 en 16 ga je bewijzen dat op elk tijdstip t met $0 < t < 1$ het lijnstuk PQ deze kromme raakt, en wel in het punt $A(t^2, (1 - t)^2)$.

figuur 11



6p **15** □ Toon aan dat op elk tijdstip t de richtingscoëfficiënt van AP gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van PQ.

Omdat op elk tijdstip t de richtingscoëfficiënten van AP en PQ gelijk zijn, ligt A op het lijnstuk PQ. Als de richtingscoëfficiënt van PQ gelijk blijkt te zijn aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in A, kun je concluderen dat PQ de kromme raakt.

5p **16** □ Toon aan dat op elk tijdstip t de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in A gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van PQ.

Door voor alle waarden van t de bijbehorende lijnstukken PQ te tekenen, wordt het gebied onder de kromme opgevuld.

6p **17** □ Bereken de exacte oppervlakte van dit gebied.

Einde