Examen VWO

2018

tijdvak 1
maandag 14 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 73 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

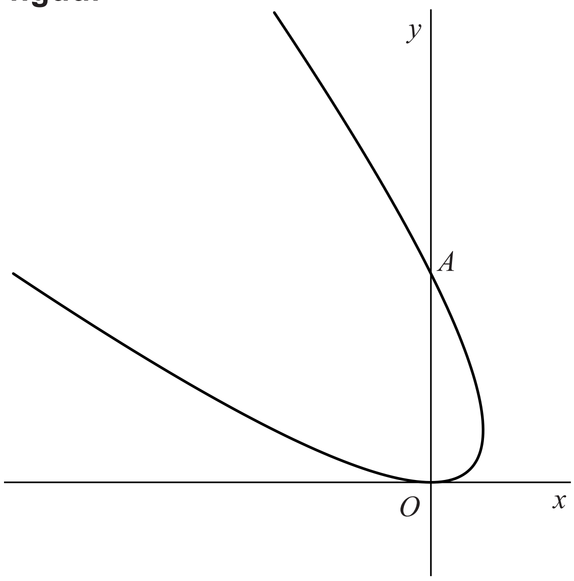
Bewegend punt

De beweging van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1+t)^2 \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

figuur



De baan van P snijdt de y-as in de oorsprong O en in punt A. Zie de figuur.

4p **1** Bereken exact de snelheid waarmee P door punt A gaat.

Voor elke waarde van t bevindt P zich op de kromme met vergelijking:

$$(x+y)^2 = 4y$$

4p **2** Bewijs dit.

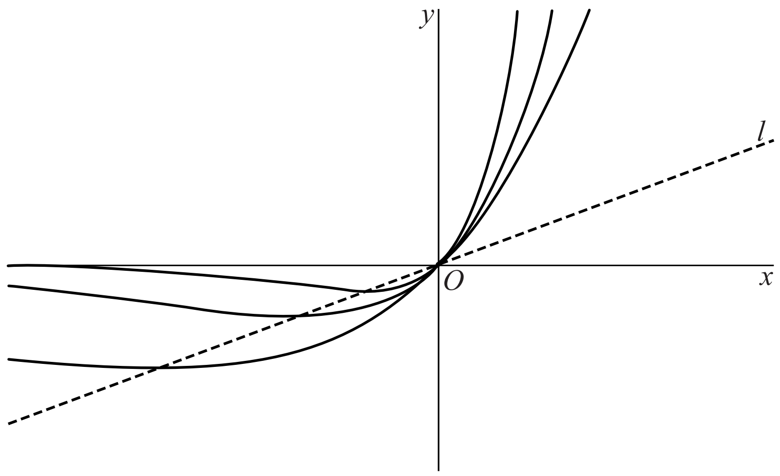
Lijn door de toppen

Voor elke waarde van a met $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x\mathrm{e}^{ax}$.

De afgeleide functie f_a' wordt gegeven door $f_a'(x) = \mathrm{e}^{ax} + ax\mathrm{e}^{ax}$.
In figuur 1 zie je voor een aantal waarden van a de grafiek van f_a.

Ook is de lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$ weergegeven.

figuur 1



Voor elke waarde van a met $a > 0$ heeft de grafiek van f_a precies één top.

4p **3** Bewijs dat deze top op lijn l ligt.

De functie F_a is gegeven door:

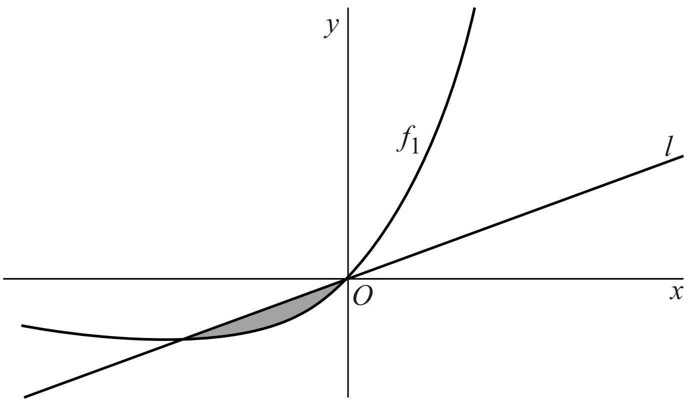
$$F_a(x) = \frac{1}{a}x\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}$$

F_a is een primitieve van f_a.

3p **4** Bewijs dat F_a inderdaad een primitieve van f_a is.

Voor f_1 geldt $f_1(x) = x\mathrm{e}^x$. In figuur 2 is de grafiek van f_1 getekend, en ook lijn l. Het vlakdeel tussen lijn l en de grafiek van f_1 is grijs gemaakt.

figuur 2

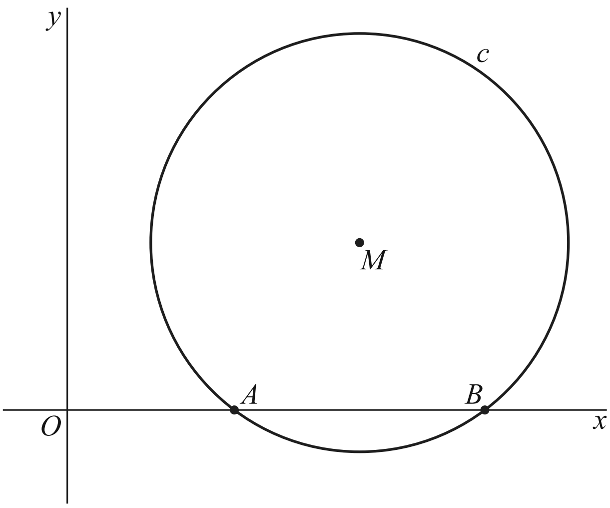


5p **5** Bereken exact de oppervlakte van het grijze vlakdeel.

Zwaartepunt en rakende cirkels

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(14, 8)$ en straal 10. Deze cirkel snijdt de x-as in de punten A en B met $x_A < x_B$. Zie figuur 1.
In A bevindt zich een puntmassa met massa 3, in B een puntmassa met massa 1 en in M een puntmassa met massa 2.

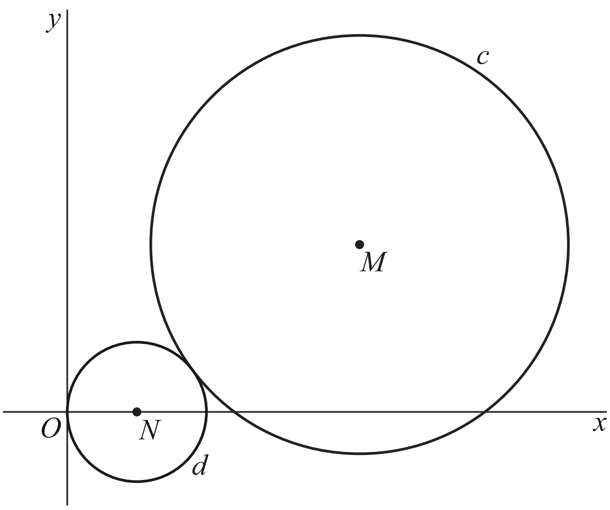
figuur 1



5p **6** Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt van deze drie puntmassa's.

De cirkel d met middelpunt N raakt de y-as in de oorsprong O en raakt cirkel c zoals weergegeven in figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



5p **7** Bereken exact de straal van cirkel d. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Maxima en minima

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.

De grafiek van f heeft oneindig veel toppen.

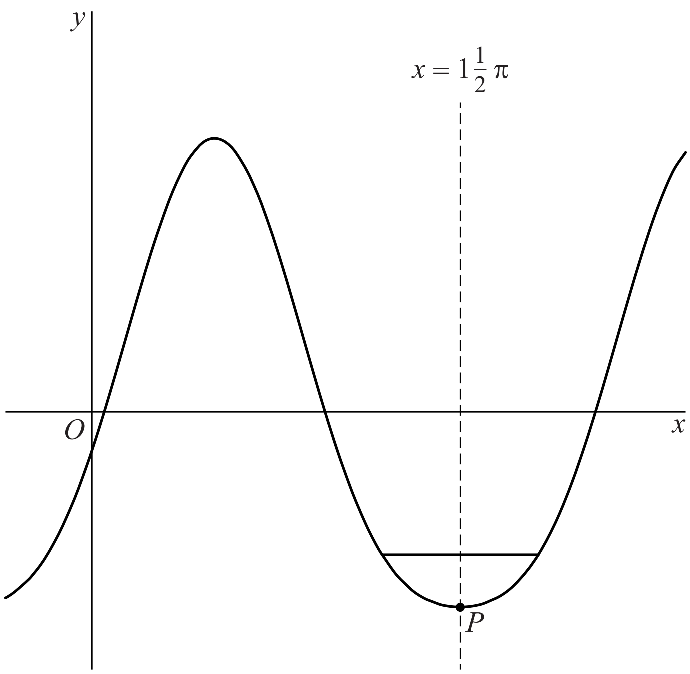
6p **8** Bereken exact de x-coördinaten van alle toppen van de grafiek van f.

Een van de toppen is het punt $P\left(1\frac{1}{2}\pi, -5\right)$.

De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door P.

Boven P wordt een horizontaal lijnstuk van lengte 2 geplaatst, waarvan de eindpunten op de grafiek van f liggen. Zie de figuur.

figuur



4p **9** Bereken de afstand van P tot het horizontale lijnstuk. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Voor elke waarde van k met $k > 0$ wordt de functie f_k gegeven door:

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}(\mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{-kx})$$

De grafiek van f_k wordt een **kettinglijn** genoemd.

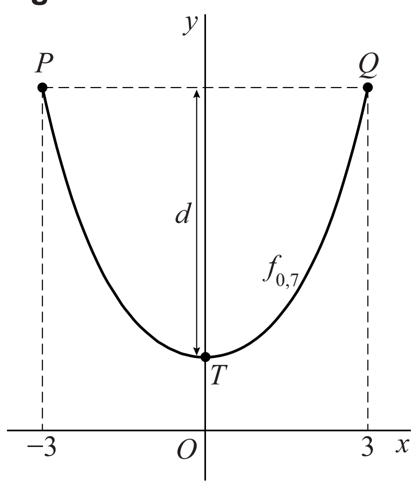
Op de grafiek van f_k worden twee punten P en Q met gelijke y-coördinaat gekozen. De lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q noemen we l. De top T van de kettinglijn ligt op de y-as. De afstand van T tot de horizontale lijn PQ noemen we d. Zie figuur 1.

Er geldt: $k = \dfrac{8d}{l^2 - 4d^2}$

In figuur 1 is voor $k = 0{,}7$, $x_P = -3$ en $x_Q = 3$ het bijbehorende deel van de kettinglijn getekend.

4p **10** Bereken voor de situatie van figuur 1 de lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

figuur 1



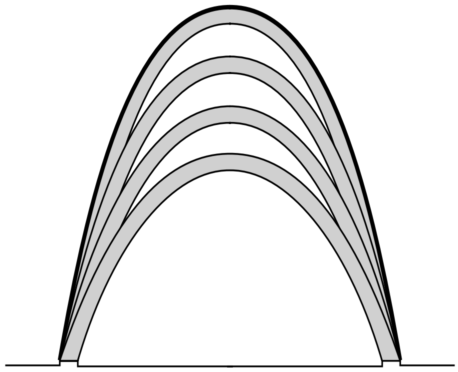
Als het deel van de grafiek van f_k tussen P en Q wordt gespiegeld in de x-as en vervolgens omhoog wordt geschoven, ontstaat een boog.

Bij de bouw van de Sheffield Winter Garden, een in 2003 geopende plantenkas, is gebruikgemaakt van dergelijke bogen. Zie de foto.

De ontwerpers hebben een tekening gemaakt van het vooraanzicht van het gebouw. Dit vooraanzicht bestaat uit acht bogen. Zie figuur 2. In de rest van deze opgave kijken we naar de grootste boog. Deze boog is in figuur 2 dikker gedrukt.

foto

figuur 2



Voor de grootste boog in deze tekening geldt:
- de lengte van de boog is 49,63 meter;
- het hoogste punt van de boog bevindt zich 20,51 meter boven de grond.

Bij deze grootste boog gaan we een functievoorschrift opstellen.
We kiezen daartoe een assenstelsel waarbij de x-as door de onderste punten van de boog gaat en de top van de boog op de y-as ligt.
De eenheden langs de assen zijn meters.

In dit assenstelsel wordt de boog weergegeven door de grafiek van een functie h.
De grafiek van deze functie h ontstaat door de grafiek van een functie f_k te spiegelen in de x-as en de beeldgrafiek vervolgens omhoog te schuiven.
Er is precies één waarde van k waarvoor de beeldgrafiek de juiste lengte en hoogte heeft.

5p **11** Stel een functievoorschrift op van h. Rond de getallen in je eindantwoord af op twee decimalen.

Natuurlijke logaritme van de wortel

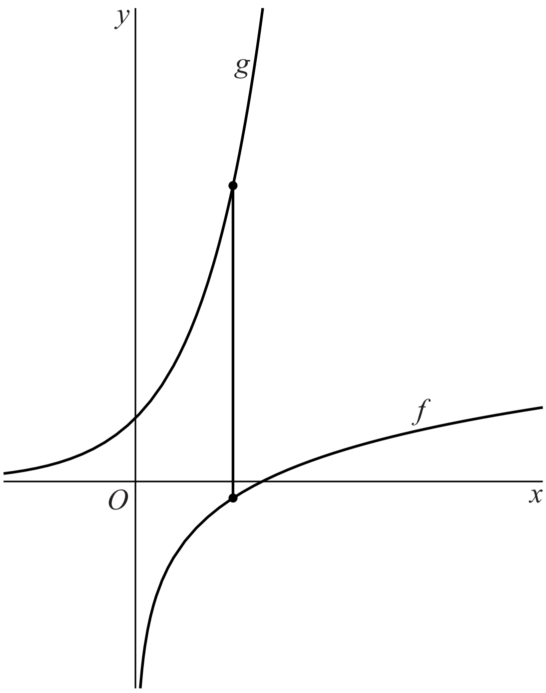
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$.

Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}. Er geldt: $f^{\text{inv}}(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

3p **12** Bewijs dat inderdaad geldt $f^{\text{inv}}(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

De grafiek van f^{inv} wordt ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van de functie g.
Elke verticale lijn rechts van de y-as snijdt de grafiek van f in één punt en de grafiek van g in één punt. Het lijnstuk tussen deze twee punten heeft een lengte die afhangt van de plaats van de verticale lijn. Zie de figuur.

figuur



4p **13** Bereken de minimale lengte van het lijnstuk. Rond je eindantwoord af op drie decimalen.

De functie h wordt gegeven door:

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\ln(x)}$$

De grafiek van h heeft rechts van de y-as één perforatie.

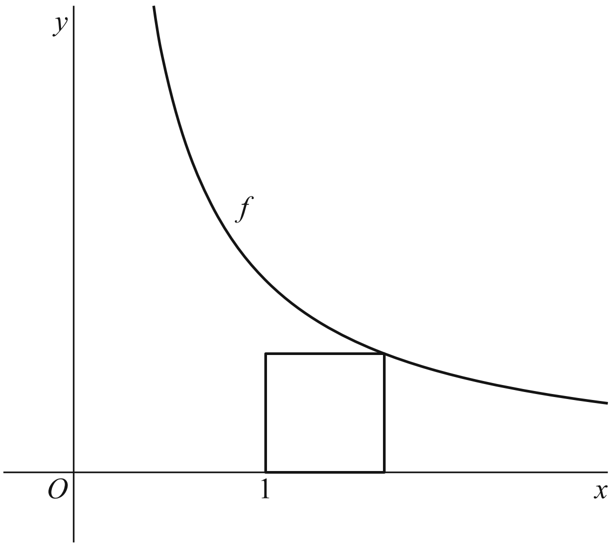
4p **14** Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

Vierkant onder grafiek

Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.

In de figuur is de grafiek van f getekend. Onder de grafiek is een vierkant getekend met twee zijden evenwijdig aan de x-as en twee zijden evenwijdig aan de y-as.

figuur



Het vierkant heeft linksonder hoekpunt $(1, 0)$. Het hoekpunt rechtsboven ligt op de grafiek van f.

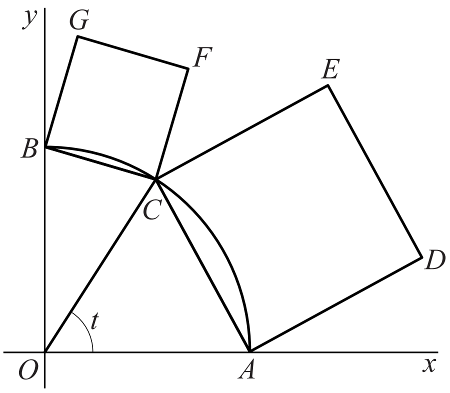
4p **15** Bereken exact de lengte van de zijde van het vierkant.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Twee vierkanten op een kwartcirkel

Gegeven zijn de punten $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Punt C bevindt zich op de kwartcirkel door A en B met middelpunt $O(0, 0)$. Op de lijnstukken AC en BC worden twee vierkanten $ADEC$ en $BCFG$ getekend. Zie figuur 1.

figuur 1



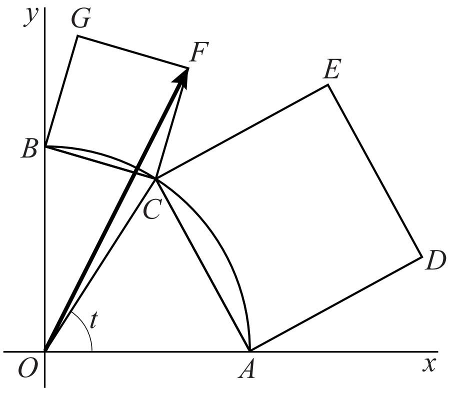
De grootte van hoek AOC (in radialen) noemen we t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
Punt C heeft dus coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$.

Er is een waarde van t waarvoor de oppervlakte van vierkant $ADEC$ twee keer zo groot is als de oppervlakte van vierkant $BCFG$.

5p **16** Bereken deze waarde van t. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met vector $\overrightarrow{OF}$.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Voor elke waarde van t met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$

4p **17** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.